FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Secondoo appello - Sessione invernale
Venerdì 5 Febbraio 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Poiché il momento coniugato a x vale $p = 4\,A\,\dot{x}^3 + 2\,B\,x^2\dot{x}$, l'equazione del moto puó essere scritta nella forma

$$(12\,A\,\dot{x}^2 + 2\,B\,x^2)\,\ddot{x} = -(2\,B\,\dot{x}^2 + 4\,C\,x^2)\,x.$$

2) Poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, la quantitá $E = p\dot{x} - L$ é conservata, e dopo qualche elementare semplificazione si ottiene

$$E = 3\,A\,\dot{x}^4 + B\,x^2\dot{x}^2 + C\,x^4.$$

3) L'equazione del moto si riduce all'equazione per l'oscillatore armonico se il coefficiente di $\ddot{x}$ nel lato sinistro dell'equazione é proporzionale al coefficiente di x nel lato destro.

Ciò avviene se e solo se

$$\frac{12A}{2B} = \frac{2B}{4C},$$

e di conseguenza il vincolo che deve essere soddisfatto è

$$B = 2\,\sqrt{3AC}.$$

In questo caso l'equazione si riduce semplicemente a

$$\sqrt{3A}\,\ddot{x} = -\sqrt{C}\,x,$$

e corrisponde a moti armonici di frequenza $\omega^2 = \sqrt{\frac{C}{3A}}$.

4) Sostituendo la relazione trovata per B nell'espressione di E si trova facilmente che vale

$$E = (\sqrt{3A}\,\dot{x}^2 + \sqrt{C}\,x^2)^2.$$

5) Notando che la condizione per l'esistenza di ulteriori soluzioni equivale alla richiesta che il coefficiente comune ai due lati dell'equazione si annulli, e notando che tale coefficiente, sostituendo l'espressione per B, vale $4\sqrt{3A}(\sqrt{3A}\,\dot{x}^2 + \sqrt{C}\,x^2)$, si vede che la condizione per il suo annullamento equivale alla richiesta che $E = 0$. Non si tratta quindi di una nuova soluzione, ma di un caso particolare della precedente, peraltro banale perché la soluzione é in questo caso $x = 0$.

1) Nel primo caso si ha

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \sum_j Q_j R_{ji} = \sum_j {}^t R_{ij} Q_j,$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -\sum_j R_{ij} q_j,$$

per cui la forma esplicita della trasformazione è

$$P_i = -\sum_j R_{ij} q_j, \qquad\qquad Q_i = \sum_j {}^t R_{ij}^{-1} p_j.$$

Nel secondo caso caso vale

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -\sum_j S_{ji} P_j,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = \sum_j p_j S_{ji} = \sum_j {}^t S_{ij} p_j,$$

per cui la forma esplicita della trasformazione è

$$P_i = -\sum_j S_{ij}^{-1} q_j, \qquad\qquad Q_i = \sum_j {}^t S_{ij} p_j.$$

2) Dal confronto dei risultati segue immediatamente che le due trasformazioni sono identiche se $R = S^{-1}$. Il calcolo diretto della trasformazione di Legendre di F_1 si effettua utilizzando la relazione

$$F_4(p_i, P_i) = F_1(q_i, Q_i) + \sum P_i Q_i - \sum p_i q_i,$$

in cui si devono effettuare le opportune sostituzioni per ottenere la corretta dipendenza dalle variabili.

Utilizzando i irisultati precedenti si ottiene

$$F_4(p_i, P_i) = -\sum_{jklm} p_j R_{jk}^{-1} R_{kl} R_{lm}^{-1} P_m + \sum_{jk} p_j R_{jk}^{-1} P_k + \sum p_j R_{jk}^{-1} P_k,$$

da cui

$$F_4(p_i, P_i) = \sum p_j R_{jk}^{-1} P_k,$$

e se si vogliono rendere identiche le trasformazioni segue subito la relazione $S = R^{-1}$

1) Parametrizziamo il generico quadrivettore tempo T^μ e il generico quadrivettore luce L^μ nella forma

$$T^\mu \equiv (t_0, \mathbf{t}), \qquad L^\mu \equiv (l_0, \mathbf{l}),$$

dove $\mathbf{t}$ e $\mathbf{l}$ sono due trivettori arbitrari.

Ricordiamo che per definizione devono essere soddisfatte le condizioni

$$t_0^2 > \mathbf{t}^2, \qquad l_0^2 = \mathbf{l}^2.$$

Notiamo ora che la condizione di annullamento del prodotto scalare di questi quadrivettori corrisponde alla richiesta che $\mathbf{t} \cdot \mathbf{l} = t_0\, l_0$, da cui quadrando e sostituendo si ottiene

$$(\mathbf{t} \cdot \mathbf{l})^2 = t_0^2\, l_0^2 > \mathbf{t}^2\, \mathbf{l}^2,$$

che è impossibile per le proprietà del prodotto scalare in spazio euclideo (vale la disuguaglianza di segno opposto).

Dovrebbe essere chiaro che per lo stesso argomento è invece possibile avere prodotto scalare nullo tra un quadrivettore di genere luce e uno di genere spazio.

2) Poiché U^μ é una quadrivelocità la sua norma deve necessariamente valere c^2, indipendentemente da τ, e poiché la norma di U^μ è in questo caso un polinomio di secondo grado in τ, la condizione che essa sia uguale a c^2 implica i seguenti vincoli sui coefficienti, e quindi sui quadrivettori:

$$A^\mu A_\mu = c^2, \qquad A^\mu B_\mu = 0, \qquad B^\mu B_\mu = 0.$$

La prima condizione corrisponde alla richiesta che A^μ sia un quadrivettore di genere tempo, per la terza condizione B^μ deve essere di genere luce e quindi, per il risultato di cui al punto 1), la condizione che il loro prodotto scalare si annulli non può mai essere soddisfatta.

3) In questo caso il vincolo sulla norma di U^μ si traduce in cinque distinte condizioni, che hanno la forma seguente:

$$A^\mu A_\mu = c^2, \qquad A^\mu B_\mu = 0,$$

$$B^\mu B_\mu + 2A^\mu C_\mu = 0, \qquad B^\mu C_\mu = 0, \qquad C^\mu C_\mu = 0.$$

Notiamo poi che la quadriaccelerazione W^μ può essere immediatamente calcolata ottenendo

$$W^\mu(\tau) \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau} = B^\mu + 2\, C^\mu \tau,$$

e la norma della quadriaccelerazione, che è sempre negativa, vale

$$W^\mu W_\mu = B^\mu B_\mu + 2\, B^\mu C_\mu \tau + C^\mu C_\mu \tau^2,$$

da cui per i risultati precedenti ci si riduce a $W^\mu W_\mu = B^\mu B_\mu \leq 0$.

È quindi possibile stabilire che A^μ deve essere un quadrivettore di genere tempo, B^μ deve essere di genere spazio e C^μ deve essere di genere luce, mentre i prodotti scalari $A^\mu B_\mu$ e $B^\mu C_\mu$ si annullano e il prodotto scalare $A^\mu C_\mu$ risulta positivo.

Anche sulla base dei risultati precedenti posssiamo riconoscere che tutte queste condizioni sono mutuamente compatibili.

Consideriamo ora le parti spaziali dei tre quadrivettori: una rotazione permette sempre di orientare uno dei tre vettori spaziali lungo un asse assegnato, e si può poi portare un secondo vettore su un piano assegnato. Di conseguenza i tre quadrivettori possono essere individuati da nove parametri, e le cinque equazioni sopra ricavate riducono quindi il numero dei parametri dinamici indipendenti a quattro (ad esempio le tre componenti temporali e l'angolo tra la parte spaziale di B^μ e quella di C^μ).

4) Il modulo dell'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea a_0 è legato alla norma della quadriaccelerazione dalla relazione $W^\mu W_\mu = -a_0^2$.

Pertanto nel nostro caso vale

$$a_0^2 = -B^\mu B_\mu > 0$$

ed è evidente che a_0 è costante, anche se la direzione dell'accelerazione deve variare al variare di τ, in quanto le parti spaziali di B^μ e di C^μ non possono essere parallele, in quanto in tal caso risulterebbe che B^μ è di genere luce e quindi si dovrebbe annullare il prodotto scalare $A^\mu C_\mu$, cosa che come si è visto è impossibile.