Meccanica Quantistica

20 Giugno 2018 (A.A. 17/18)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Un sistema è schematizzato come un oscillatore composto da una massa M e carica $+e$ e da un elettrone di massa m e carica $-e$. Per tutto quel che segue la massa M si può considerare infinita e posta nell'origine degli assi coordinati, quindi l'Hamiltoniana del sistema si può schematizzare come

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \,. \tag{1}$$

Il sistema è nello stato fondamentale. Il sistema è perturbato da una seconda carica Q posta a distanza R dall'origine, con $R \gg \ell$, dove ℓ è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore. Si dica se l'oscillatore esercita una forza sulla carica Q e si specifichi se è attrattiva o repulsiva.

Suggerimento: si consideri il campo elettrico generato dalla carica Q.

Problema 2

I primi livelli dell'atomo di sodio possono essere descritti da una Hamiltoniana del tipo

$$H = H_0 + H_{LS} \tag{2}$$

dove H_0 è una hamiltoniana a simmetria centrale che agisce sull'elettrone periferico. Le prime configurazioni elettroniche sono $3s$ e $3p$ con energie E_0 ed E_1 corrispondenti ai primi due livelli di H_0. H_{LS} è una hamiltoniana effettiva che descrive le principali correzioni relativistiche ed è della forma

$$H_{LS} = A\, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \tag{3}$$

con A costante.

a) Si calcoli come cambiano i livelli energetici E_0, E_1 sotto la perturbazione H_{LS}.

L'atomo è sottoposto ad un campo magnetico costante B diretto lungo l'asse z con $\mu_B B \ll A$.

b) Si calcoli al primo ordine in B l'effetto sui livelli energetici calcolati al punto a). Si disegni uno schema dei livelli calcolandone le energie.

Gli atomi di sodio sono sottoposti ad una scarica elettrica che popola i livelli relativi alla configurazione $3p$, sempre in presenza di campo magnetico. Gli atomi eccitati decadono per emissione spontanea.

c) Si osservano i fotoni emessi ponendo un rivelatore lungo l'asse z. Quante righe si osservano?

d) Si pone ora un rivelatore lungo l'asse x, ortogonale al campo magnetico. Quante righe si osservano?

Problema 3

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale. La massa oscillante m ha carica $-e$ e la frequenza (angolare) di oscillazione è ω_0.

Il sistema è nello stato fondamentale. Al tempo $t = 0$ il sistema è sottoposto ad un campo elettrico (a tutti gli effetti uniforme sull'oscilatore)

$$E(t) = E_0 \exp(-t/\tau) \sin(\omega t)$$

a) Si scriva lo stato del sistema al tempo t (usando la notazione con i *ket*) al primo ordine perturbativo in E_0 per tempi $t \gg \tau$.

b) Si calcoli il valor medio dell'operatore di dipolo al tempo t, sempre al primo ordine in E_0 e per $t \gg \tau$.

Soluzione 1

La carica Q genera un campo elettrico $\mathcal{E} = Q/R^2$, quindi provoca un effetto Stark. Scegliendo l'asse z lungo il campo si vede che solo la componente z dell'oscillatore viene influenzata, cioè, in approssimazione di dipolo

$$H = H_0 + ez\mathcal{E} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + ez\mathcal{E} \tag{4}$$

L'effetto del campo si può calcolare al secondo ordine perturbativo o più semplicemente completando il quadrato

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{m\omega^2}e\mathcal{E})^2\right) - \frac{1}{2}\frac{e^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2}$$

quindi

$$\delta E = -\frac{1}{2}\frac{e^2\mathcal{E}^2}{m\omega^2} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{m\omega^2}\frac{Q^2}{R^4}$$

a cui corrisponde una forza

$$F = -\frac{\partial}{\partial R}\delta E = -2\frac{e^2}{m\omega^2}\frac{Q^2}{R^5}$$

cioè una forza attrattiva.

Soluzione 2

a) Il livello s non ha struttura fine. Per il livello p i valori di J possibili sono 1/2 e 3/2 e scrivendo

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right)$$

si ha subito

$$\delta E_{1/2} = -A\,; \qquad \delta E_{3/2} = \frac{A}{2} \tag{5}$$

b) Il fattore di Landè è dato da

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

e si ha

$$g[s_{1/2}] = 2 \;\; g[p_{1/2}] = \frac{2}{3}\,; \quad g[p_{3/2}] = \frac{4}{3}$$

Lo spostamento di energia dovuto all'effetto Zeeman è $g\mu_B B J_z$ e quindi si ha

$$E[p_{3/2}] + \mu_B B\{-2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\} \tag{6}$$

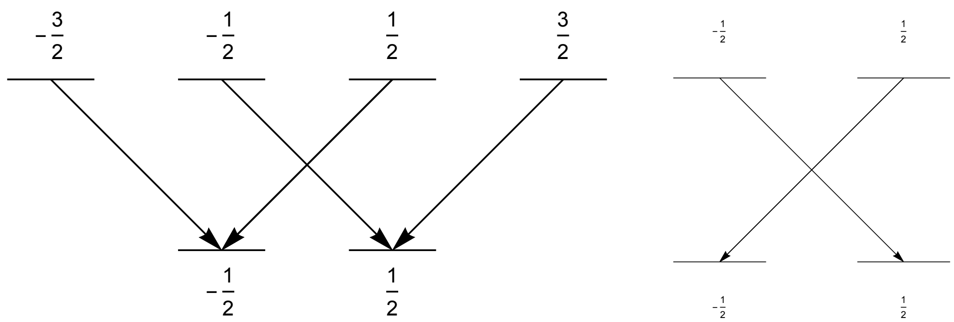
$$E[p_{1/2}] + \mu_B B\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} \tag{7}$$

$$E[s_{1/2}] + \mu_B B\{-1, 1\} \tag{8}$$

c) In assenza di campo magnetico si hanno due frequenze di transizione

$$\hbar\omega_1 = E[p_{1/2}] - E[s_{1/2}]\,; \qquad \hbar\omega_2 = E[p_{3/2}] - E[s_{1/2}]$$

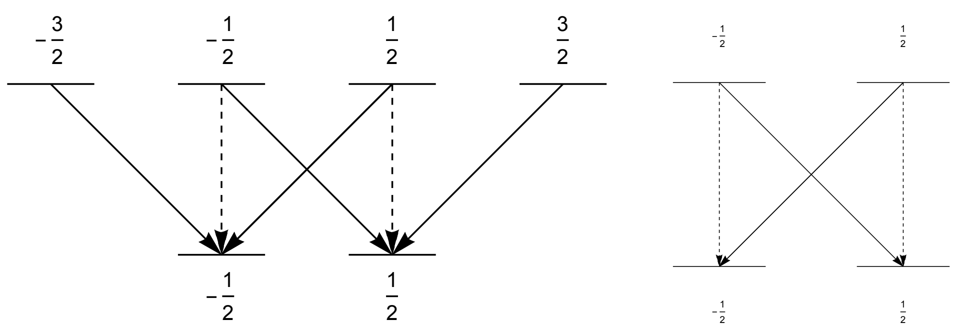
Osservando la luce lungo l'asse z le uniche polarizzazioni permesse sono quelle ortogonali a z, quindi negli elementi di matrice possono intervenire solo le componenti d_x, d_y del dipolo con conseguenti regole di selezione $\Delta j_z = \pm 1$ Si hanno, per i due livelli, le transizioni illustrate in figura, quindi 6 righe



Le freqeunze corrispondenti sono

$$\omega_2 + \frac{1}{\hbar}\mu_B B(-1, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1)\,; \quad \omega_1 + \frac{1}{\hbar}\mu_B B(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \tag{9}$$

d) Osservando la luce lungo l'asse x sono ammissibili le componenti d_y (con regole di selezione $\Delta j_z = \pm 1$) e d_z, (con regole di selezione $\Delta j_z = 0$). Si hanno quindi in totale 10 righe, illustrate nella figura seguente



Le frequenze che si aggiungono alle (9) sono

$$\omega_2 + \frac{1}{\hbar}\mu_B B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\,; \quad \omega_1 + \frac{1}{\hbar}\mu_B B(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

Soluzione 3

a) La perturbazione indotta dal campo elettrico è $exE(t)$, avendo indicato con x la coordinata della massa oscillante. Usando $x = \ell/\sqrt{2}(a + a^\dagger)$ con $\ell^2 = \hbar/m\omega_0$ vediamo che l'unico stato che può avere mixing al primo ordine con lo stato fondamentale è il primo eccitato, quindi in generale

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle \equiv e^{-iE_0 t/\hbar} a_0(t)|0\rangle + e^{-iE_1 t/\hbar} a_1(t)|1\rangle$$

I coefficienti a_i sono quelli in rappresentazione di interazione. Come è noto, essendo $a_0(0) = 1$

$$a_1(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{10}t_1}\langle 1|exE(t_1)|0\rangle dt_1 = \frac{1}{i\hbar}\frac{\ell}{\sqrt{2}}eE_0\int_0^t e^{i\omega_0 t_1}e^{-t_1/\tau}\sin\omega t_1 dt_1$$

Scrivendo il seno in termini di esponenziali l'integrale vale

$$\frac{\tau}{2i}\left\{\frac{1-e^{-t/\tau}e^{it(\omega+\omega_0)}}{1-i\tau(\omega+\omega_0)} - \frac{1-e^{-t/\tau}e^{it(\omega-\omega_0)}}{1+i\tau(\omega-\omega_0)}\right\}$$

Per $t \gg \tau$ l'integrale tende, sommando i termini, a

$$\frac{\tau^2\omega}{1-2i\tau\omega_0+\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)}$$

e corrispondentemente

$$a_1 \to b_1 = \frac{1}{i\hbar}\frac{\ell}{\sqrt{2}}eE_0\,\frac{\tau^2\omega}{1-2i\tau\omega_0+\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)} \equiv |b_1|\exp(i\beta) \tag{10}$$

Al primo ordine perturbativo $a_0 = 1$. Lo stato quindi è, per grandi tempi

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}\left(|0\rangle + b_1e^{-i\omega_0t}|1\rangle\right) \tag{11}$$

b) Il valor medio del dipolo al tempo $t \gg \tau$ è

$$\langle\psi(t)|-ex|\psi(t)\rangle = -e\left(b_1e^{-i\omega_0t}\langle 0|x|1\rangle + b_1^*e^{i\omega_0t}\langle 1|x|0\rangle\right) = -2e|b_1|\cos(\omega_0t-\beta)$$