FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Primo appello - Sessione estiva
Mercoledì 16 Giugno 2004 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Ogni fotone trasporta una quantità di moto pari a $h/c\nu$. Nella riflessione da specchio in movimento, e nel limite di massa infinita dello specchio, il fotone cambia la sua frequenza secondo la legge dell'effetto Doppler longitudinale (doppio), e risulta quindi

$$\nu_r = \frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\nu,$$

mentre il verso del movimento (e quindi il segno dell'impulso) diventa opposto.

La quantità di moto ceduta allo specchio dal singolo fotone è data dalla differenza tra impulso iniziale e finale, e vale quindi

$$\frac{h}{c}(\nu+\nu_r) = \frac{2h\nu}{c}\frac{1}{1+\frac{u}{c}}.$$

La pressione è la forza esercitata sull'unità di superficie, e si ottiene quindi calcolando la quantità di moto trasferita nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie. Poiché conosciamo il numero di fotoni che attraversano l'unità di superficie in quiete nell'unità di tempo possiamo ricavare facilmente il numero di fotoni che attraversano l'unità di superficie in movimento con velocità u trovando come conseguenza della cinematica (classica) la relazione $I_m = I(1-u/c)$. Otteniamo quindi

$$p = \frac{2h(\nu+\nu_r)I_m}{c} = \frac{2h\nu I}{c}\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}.$$

Abbiamo quindi ricavato la legge della pressione e calcolato

$$p_0 = \frac{2h\nu I}{c}.$$

Alternativamente, possiamo usare la legge di trasformazione di ν e I per determinare il loro valore nel riferimento di quiete istantanea dello specchio:

$$\nu_0 = \gamma(u)(1-\frac{u}{c})\nu \qquad\qquad I_0 = \gamma(u)(1-\frac{u}{c})I.$$

In tale riferimento l'impulso trasferito dal singolo fotone è $2h\nu_0/c$ e il flusso di fotoni sulla superficie dello specchio è esattamente I_0, per cui immediatamente si ricava per la pressione

$$p = \frac{2h\nu_0 I_0}{c} = \gamma^2(u)(1-\frac{u}{c})^2\frac{2h\nu I}{c} = \frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\frac{2h\nu I}{c}.$$

La trasformazione di Lorentz longitudinale delle frequenze è quella dei vettori d'onda, e si riduce alla formula dell'effetto Doppler longitudinale:

$$\nu' = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})\nu.$$

Una relazione analoga vale per la trasformazione dell'intensità del fascio:

$$I' = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})I.$$

La legge di trasformazione di u è la ben nota relazione

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}.$$

Da essa si ricava anche facilmente la relazione

$$\frac{1 - \frac{u'}{c}}{1 + \frac{u'}{c}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}.$$

Si noti per inciso che, posto $I'_m = I'(1 - u'/c)$, ne risulta la legge di trasformazione

$$I'_m = \frac{I_m}{\gamma(v)(1 - \frac{uv}{c^2})}$$

che può anche essere riscritta nella forma $\gamma(u')I'_m = \gamma(u)I_m = I_0$, che esprime l'invarianza di I_0, come ci si aspetta dalla sua definizione.

Combinando i risultati precedenti si ricava abbastanza facilmente la proprietà

$$\nu' I' \frac{1 - \frac{u'}{c}}{1 + \frac{u'}{c}} = \nu I \frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}.$$

Da quest'ultima relazione discende immediatamente che la forza longitudinale esercitata sullo specchio assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento della classe indicata, coerentemente con le proprietà di covarianza della componente longitudinale della forza relativistica.

Questa proprietà poteva essere postulata nel secondo schema di soluzione presentato sopra per argomentare l'invarianza di p e dedurre quindi che l'espressione ricavata doveva valere anche nel riferimento iniziale.

Problema R.2

Nel caso in esame si può scrivere la legge di forza utilizzando l'espressione della massa longitudinale:

$$F \equiv \frac{F_0}{1 + \frac{u}{c}} = M\gamma^3(u)\frac{du}{dt}.$$

Introducendo per comodità la costante $K = \frac{F_0}{Mc}$, che ha le dimensioni fisiche di una frequenza e usando la variabile rapidità otteniamo la relazione

$$\frac{1}{c}\gamma^3(u)\frac{du}{dt} = \cosh\theta\frac{d\theta}{dt}$$

e possiamo riscrivere la legge del moto nella forma

$$\cosh\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{1+\tanh\theta},$$

che con semplici calcoli si riduce a

$$e^\theta\frac{d\theta}{dt} = K.$$

Integrando, imponendo la condizione iniziale e tornando alla variabile u otteniamo quindi

$$\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}} = 1+Kt,$$

da cui risolvendo si ricava

$$\frac{u}{c} = \frac{(1+Kt)^2-1}{(1+Kt)^2+1}$$

e corrispondentemente

$$\gamma(u) = \frac{1+(1+Kt)^2}{2(1+Kt)}.$$

Possiamo ora calcolare il tempo proprio tramite la relazione

$$\tau = \int\frac{2(1+Kt)}{1+(1+Kt)^2}dt = \frac{1}{K}\log\frac{1+(1+Kt)^2}{2},$$

da cui consegue anche la relazione

$$e^{2\theta} = 2e^{K\tau}-1.$$

È anche possibile integrare esplicitamente l'equazione $\frac{dx}{dt} = u(t)$ con la condizione iniziale $x(0) = 0$, ottenendo

$$x(t) = ct - \frac{2c}{K}\tan^{-1}\frac{Kt}{2+Kt}.$$

Di conseguenza nel limite $t \to \infty$ si ottiene

$$ct - x(t) \to \frac{2c}{K}\tan^{-1}1 = \frac{c\pi}{2K}.$$

Problema A.1

È un caso particolare del problema A.2.14, con $V(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ e $N = 3$.

La soluzione generale dell'equazione del moto è quindi $x(t) = A\cos(\sqrt{K/m}\,t + \varphi)$, dove A e φ sono costanti arbitrarie.

Problema A.2

È un caso particolare del problema A.3.19, con $f(\rho) = K\rho^2$. Vale quindi $\bar\rho^2 = p_\varphi/m\omega_0$, dove $\omega_0 = \sqrt{2gK}$, e la frequenza delle piccole oscillazioni vale $\omega^2 = 4\omega_0^2/(1+4K^2\bar\rho^2)$.