FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Primo appello - Sessione estiva
Mercoledì 15 Giugno 2005 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Poichè i corpi celesti a grande distanza sono soggetti soltanto al principio d'inerzia il loro moto è rettilineo uniforme, e pertanto la relazione tra lo spazio percorso e il tempo T (età dell'Universo) è semplicemente $\mathbf{r} = \mathbf{v}T$, con $\mathbf{v}$ costante. Sostituendo nella legge di Hubble si trova $\mathbf{r} = H\mathbf{r}T$, da cui subito $T = H^{-1}$.

Il segnale ricevuto al tempo (galattico) T è stato originato a un tempo t' (dipendente dalla distanza) tale che la luce ha impiegato il tempo $T - t'$ per ritornare all'origine. Di conseguenza deve valere $vt' = c(T - t')$, da cui facilmente si ricava

$$t' = \frac{cT}{c + v}$$

e sostituendo nella legge oraria si ha subito

$$r' = vt' = \frac{vT}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{r}{1 + \frac{Hr}{c}}.$$

Il tempo proprio trascorso fino all'istante t' è dato dalla relazione

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t' = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\, T = \sqrt{\frac{1 - \frac{Hr}{c}}{1 + \frac{Hr}{c}}}\, \frac{1}{H}.$$

La relazione Doppler per corpi in allontanamento (Doppler longitudinale) è

$$\nu' = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})\nu = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\,\nu = \sqrt{\frac{1 - \frac{Hr}{c}}{1 + \frac{Hr}{c}}}\,\nu.$$

Si noti che vale $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\tau}{T}$.

Problema R.2

Posto $c = 1$, definiamo k_+ e k_- le energie (impulsi) delle componenti a massa nulla. Devono allora valere per la conservazione del quadrimpulso le relazioni:

$$k_+ - k_- = p,$$

$$k_+ + k_- = E = \sqrt{p^2 + M^2}.$$

La soluzione di questo sistema è semplice e si ottiene

$$k_\pm = \frac{1}{2}(E \pm p).$$

Ricordando poi che vale

$$p = M \sinh\theta, \qquad\qquad E = M \cosh\theta$$

si ricava facilmente la relazione

$$k_\pm = \frac{M}{2} e^{\pm\theta}.$$

La legge di trasformazione è

$$k'_\pm = \frac{1}{2}(E' \pm p') = \frac{1}{2}\gamma[(E - vp) \pm (p - vE)] = \frac{1}{2}\gamma(1 \mp v)(E \pm p),$$

da cui anche

$$k'_\pm = \sqrt{\frac{1 \mp v}{1 \pm v}} k_\pm.$$

Questa trasformazione coincide esattamente con l'effetto Doppler longitudinale, che è appunto la legge di trasformazione della frequenza dei fotoni.

Problema A.1

È un caso particolare del problema A.3.19, con $f(\rho) = A\rho^2$.

Vale quindi

$$L = \frac{1}{2}m(1 + 4A^2\rho^2)\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot\varphi^2 - Amg\rho^2.$$

Le equazioni del moto sono:

$$m(1 + 4A^2\rho^2)\ddot\rho + 4mA^2\rho\dot\rho^2 - m\rho\dot\varphi^2 + 2Amg\rho = 0,$$

$$m\rho^2\dot\varphi = costante.$$

I momenti generalizzati sono:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial\dot\rho} = m(1 + 4A^2\rho^2)\dot\rho,$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi.$$

L'Hamiltoniana vale:

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m(1 + 4A^2\rho^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + Amg\rho^2.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni vale

$$\omega = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + 4A^2\bar\rho^2}}$$

dove

$$\omega_0 = \sqrt{2Ag}, \qquad\qquad \bar\rho = \frac{p_\varphi}{m\omega_0}.$$

Problema A.2

Basterà calcolare la parentesi di Poisson

$$\{Q,P\} = \frac{q^{-\frac{1}{2}}\cos p}{1+q^{\frac{1}{2}}\cos p}[-q\sin^2 p+(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\cos p]+\frac{q^{\frac{1}{2}}\sin^2 p}{1+q^{\frac{1}{2}}\cos p}[\cos p+(1+q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{-\frac{1}{2}}] = 1.$$

Pertanto la trasformazione è canonica.

Risolvendo le equazioni di trasformazione si trova

$$q = (e^Q-1)^2\sec^2 p, \qquad P = 2e^Q(e^Q-1)\tan p.$$

La funzione generatrice è pertanto

$$F_3 = -(e^Q-1)^2\tan p.$$