FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Primo appello - Sessione estiva
Mercoledì 7 Giugno 2006 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

L'energia totale del sistema (posto $c = 1$) vale $E = 2m\gamma(u)$, mentre la quantità di moto totale è diretta lungo la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni dei fasci incidenti e vale in modulo $P = mu\gamma(u)$. Di conseguenza la velocità del centro di massa è $V = \frac{P}{E} = \frac{u}{2}$.

1) I fotoni hanno energia massima o minima nella configurazione in cui risultano allineati nella direzione individuata dalla quantità di moto totale del sistema. In tale configurazione valgono le equazioni $k_1 + k_2 = E$ e $k_1 - k_2 = P$, risolte da

$$k_1 = \frac{1}{2}(E + P), \qquad k_2 = \frac{1}{2}(E - P),$$

da cui sostituendo si ricavano i valori massimi e minimi per l'energia dei fotoni

$$k_{max} = m\gamma(u)(1 + \frac{u}{2}), \qquad k_{min} = m\gamma(u)(1 - \frac{u}{2}).$$

2) La distribuzione in energia dei fotoni prodotti è la stessa che si avrebbe in caso di decadimento di una singola particella che possedesse l'energia e l'impulso totali del sistema. Pertanto la distribuzione è uniforme e compresa tra i valori minimo e massimo ricavati in precedenza:

$$dN = \frac{dk}{mu\gamma(u)} = \frac{dk}{P}.$$

3) Nel riferimento del centro di massa l'energia di entrambi i fotoni vale

$$k_c = \frac{1}{2}\sqrt{E^2 - P^2} = \frac{m\gamma(u)}{\gamma(\frac{u}{2})}.$$

Le trasformazioni di Lorentz implicano le seguenti relazioni con le quantità valutate nel riferimento del laboratorio:

$$k = k_c\gamma(V)(1 + V\cos\theta_c) = m\gamma(u)(1 + \frac{u}{2}\cos\theta_c)$$

$$k_{\parallel} = k_c\gamma(V)(\cos\theta_c + V) = m\gamma(u)(\cos\theta_c + \frac{u}{2})$$

La richiesta che $k_{\parallel} = 0$ comporta quindi $\cos\theta_c = -\frac{u}{2}$.

4) Si tratta semplicemente di integrare la distribuzione angolare dei fotoni scritta nel riferimento del centro di massa tra il valore che corrisponde all'emissione di un fotone sul

piano ortogonale alla direzione dell'impulso totale nel riferimento del laboratorio e il valore corrispondente all'emissione in avanti:

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{u}{2}}^{1} d\cos\theta_c = \frac{1}{2}(1+\frac{u}{2}) < \frac{3}{4}.$$

Problema A.1

1) L'Hamiltoniana del sistema, come in tutti i casi in cui è presente soltanto il campo magnetico, è data dal solo termine corrispondente all'energia cinetica, e vale

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m}.$$

2) Dal calcolo diretto si ricava

$$\dot{D} = H + t\dot{H} - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{r}\cdot\mathbf{a},$$

ma notiamo che $\dot{H} = 0$ e vale $H = \frac{1}{2}mv^2$. Inoltre per le proprietà della forza di Lorentz l'accelerazione è perpendicolare al campo magnetico e quindi in questo caso è perpendicolare a $\mathbf{r}$ per cui risulta in questo caso $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$. In conclusione quindi $\dot{D} = 0$.

La trasformazione infinitesima generata da D si ricava da $\delta\mathbf{r} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{p}} = t\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

3) Dal calcolo si ricava

$$\dot{K} = -2tH - t^2\dot{H} + 2D + 2t\dot{D} + m\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = -2tH + 2D + m\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

La trasformazione infinitesima generata da K è $\delta\mathbf{r} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} = t^2\mathbf{v} - t\mathbf{r}$.

4) Notiamo che vale

$$\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\} = 0,$$

da cui è immediato ricavare

$$\{D, H\} = -H.$$

Notiamo poi che vale

$$\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial t} + \{K, H\} = 0,$$

da cui si ricava

$$\{K, H\} = -2D.$$

Calcoliamo infine direttamente

$$\{D, K\} = \frac{1}{2}mt^2\{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}, H\} + 2t^2\{H, D\} - mt\{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}, D\} + \frac{1}{2}mt\{H, r^2\} - \frac{1}{4}m^2\{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}, r^2\},$$

da cui sfruttando le proprietà già discusse risulta

$$\{D, K\} = \frac{1}{2}mt^2v^2 + 2t^2H - mt^2v^2 - mt\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{2}mr^2 = t^2H - mt\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{2}mr^2 = K.$$