FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Primo appello - Sessione estiva
Giovedì 14 Giugno 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Il processo di sincronizzazione può essere interpretato in due modi, ma il risultato è comunque lo stesso.

Nell'interpretazione *standard* la sincronizzazione avviene nel momento in cui i due osservatori si trovano nella stessa posizione, che assumeremo come origine degli assi. In questo caso, indicando con A l'evento di emissione del segnale ottico da parte del viaggiatore spaziale al tempo t' e con B l'evento di ricezione dello stesso segnale a Terra al tempo t, valgono le relazioni

$$x_A = u\,t_A, \qquad x'_A = 0, \qquad t' \equiv t'_A = \gamma(1 - \frac{u^2}{c^2})t_A = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,t_A,$$

ma vale anche $x_A = c(t - t_A)$, da cui si ricava

$$t = (1 + \frac{u}{c})t_A.$$

Combinando i risultati si ottiene quindi

$$t = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}\,t'.$$

Consideriamo invece il caso in cui la sincronizzazione avvenga mediante una prima lettura telescopica dell'orologio del viaggiatore che fissa lo zero terrestre quando viene letto lo zero del viaggiatore. In questo caso se l'intervallo di tempo terrestre tra l'emissione di due segnali da parte del viaggiatore è Δt, a causa dell'allontanamento l'intervallo di tempo terrestre tra la ricezione a Terra dei due segnali è $(1 + \frac{u}{c})\Delta t$. Ricordando poi la relazione che intercorre tra il tempo terrestre e quello del viaggiatore $\Delta t = \gamma\,\Delta t'$ si ottiene

$$t = (1 + \frac{u}{c})\gamma\,t',$$

che è esattamente la relazione ottenuta in precedenza.

Problema R.2

Possiamo calcolare la massa M della particella virtuale dalla legge di conservazione del quadrimpulso, ottenendo

$$M^2 = (p'_1 - p_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2.$$

Dimostriamo che $M^2 < 0$, e quindi la particella non può essere reale. Vale infatti

$$M^2 = 2(m_1^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p'}_1 - \varepsilon_1 \varepsilon'_1),$$

e basterà dimostrare che $\varepsilon_1 \varepsilon'_1 > m_1^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p'}_1$.

Quadrando la disugluaglianza e sostituendo le espressioni dell'energia in funzione dell'impulso si ottiene infatti

$$\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p'}_1^2 + m_1^2(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p'}_1^2) > (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p'}_1)^2 + 2\, m_1^2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p'}_1,$$

da cui anche

$$\mathbf{p}_1^2 \mathbf{p'}_1^2 - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p'}_1)^2 + m_1^2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p'}_1)^2 > 0.$$

Ma notiamo che il terzo termine è sempre maggiore o uguale a zero, e così pure la differenza tra i primi due, e pertanto la disuguaglianza è sempre soddisfatta.

Alternativamente, basta porsi nel riferimento in cui le particelle che collidono si scambiano impulso ma non energia (riferimento di Breit). In questo riferimento il calcolo della norma del quadrimpulso scambiato è banale e il risultato è evidentemente minore di zero.

Problema A.1

La Lagrangiana del sistema può essere scritta nella forma

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - L_1)^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1 - L_2)^2 + m_1 g\, x_1 + m_2 g\, x_2$$

Il minimo del potenziale per questa Lagrangiana si ha quandp

$$-K_1(x_1 - L_1) + K_2(x_2 - x_1 - L_2) + m_1 g = 0,$$

$$-K_2(x_2 - x_1 - L_2) + m_2 g = 0,$$

ossia per

$$x_1^{eq} = L_1 + \frac{m_1 + m_2}{K_1} g,$$

$$x_2^{eq} = L_1 + L_2 + \frac{m_1 + m_2}{K_1} + \frac{m_2}{K_2}.$$

Definendo coordinate generalizzate $\eta_i = x_i - x_i^{eq}$ la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 \eta_1^2 - \frac{1}{2} K_2 (\eta_2 - \eta_1)^2.$$

L'equazione per le frequenze proprie del sistema è allora

$$(m_1 \omega^2 - K_1 - K_2)(m_2 \omega^2 - K_2) - K_2^2 = 0,$$

ed è risolta da

$$\omega^2 = \frac{K_1 + K_2}{2\, m_1} + \frac{K_2}{2\, m_2} \pm \sqrt{(\frac{K_1 + K_2}{2\, m_1} + \frac{K_2}{2\, m_2})^2 - \frac{K_1 K_2}{m_1 m_2}}.$$