FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Primo appello - Sessione estiva
Martedì 3 Giugno 2008 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Scriviamo la condizione di uguaglianza della lunghezza apparente delle due sbarre nel riferimento dell'osservatore:

$$l_1\sqrt{1-\beta_1^2} = l_2\sqrt{1-\beta_2^2},$$

dove abbiamo usato la notazione standard $\beta \equiv v/c$.

Scriviamo poi la condizione che lega le due velocità alla velocità relativa:

$$\beta_r = \frac{\beta_1 - \beta_2}{1 - \beta_1\beta_2}.$$

L'insieme di queste due condizioni forma un sistema in due incognite che può essere risolto al fine di determinare β_1 e β_2.

A tal fine conviene passare alle variabili di rapidità $\beta \equiv \tanh\theta$, riscrivendo quindi il sistema nella forma:

$$\frac{l_1}{\cosh\theta_1} = \frac{l_2}{\cosh\theta_2}, \qquad \theta_r = \theta_1 - \theta_2.$$

Con semplici passaggi e l'uso delle relazioni della trigonometria iperbolica si ricava quindi la soluzione nella forma

$$\beta_1 \equiv \tanh\theta_1 = \frac{1}{\tanh\theta_r} - \frac{l_2}{l_1\sinh\theta_r} = \frac{1}{\beta_r}\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\sqrt{1-\beta_r^2}\right),$$

$$\beta_2 \equiv \tanh\theta_2 = -\frac{1}{\tanh\theta_r} + \frac{l_1}{l_2\sinh\theta_r} = -\frac{1}{\beta_r}\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\sqrt{1-\beta_r^2}\right),$$

in cui è evidente la simmetria derivante dallo scambio delle sbarre accompagnato dal cambio del segno della velocità relativa.

2) Sostituendo nell'espressione della lunghezza apparente L si ricava facilmente la relazione

$$L = \frac{\sqrt{2\,l_1 l_2\cosh\theta_r - l_1^2 - l_2^2}}{\sinh\theta_r}.$$

Anche in quest'espressione è evidente la simmetria di scambio, e merita notare il fatto che non per ogni valore delle lunghezze delle sbarre e della velocità relativa esistono soluzioni fisicamente accettabili. Deve in realtà essere soddisfatta la disuguaglianza:

$$\cosh\theta_r > \frac{l_1^2 + l_2^2}{2\,l_1 l_2}.$$

Problema R.2

1) Conviene utilizzare la relazione tra i quadrivettori quadrimpulso scritta nella forma $K' = K+P-P'$, dove P indica i quadrimpulsi fotonici e P quelli elettronici, per eliminare, prendendone la norma, ogni dipendenza dalle variabili del fotone diffuso. Risulta allora

$$0 = m_e^2 + P \cdot K - P' \cdot K - P \cdot P',$$

ed esplicitando la dipendenza dalle variabili dinamiche del fotone incidente e dell'elettrone diffuso si ottiene immediatamente

$$0 = m_e^2 + m_e \hbar\omega - (E - p\,\cos\varphi)\,\hbar\omega - m_e E,$$

dove $(E, p\,\cos\varphi, p\,\sin\varphi)$ sono le componenti del quadrimpulso dell'elettrone dopo l'urto.

La relazione ottenuta può essere facilmente ricondotta alla forma:

$$(E - m_e)(\hbar\omega + m_e) = p\,\hbar\omega\cos\varphi,$$

da cui anche

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{E - m_e}{E + m_e}}\frac{\hbar\omega + m_e}{\hbar\omega}.$$

2) Invertendo la relazione ottenuta in precedenza si ricava

$$E = m\frac{(\hbar\omega + m_e)^2 + (\hbar\omega\,\cos\varphi)^2}{(\hbar\omega + m_e)^2 - (\hbar\omega\,\cos\varphi)^2}.$$

Problema A.1

1) Calcoliamo la derivata totale rispetto al tempo del vettore $\mathbf{K}$:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{p} + t\,\dot{\mathbf{p}} - \dot{H}\,\mathbf{r} - H\,\dot{\mathbf{r}}.$$

Notiamo ora che nel caso di una particella non soggetta a forze vale $\dot{\mathbf{p}} = 0$ e di conseguenza $\dot{H} = 0$, ma vale anche la relazione relativistica $\mathbf{p} = H\,\dot{\mathbf{r}}$, da cui sostituendo segue immediatamente $\dot{\mathbf{K}} = 0$.

2) Il calcolo della parentesi di Poisson $\{\mathbf{K}, H\}$ si riduce a:

$$\{t\,\mathbf{p} - H\,\mathbf{r},\, H\} = t\,\{\mathbf{p},\, H\} - H\,\{\mathbf{r},\, H\} = t\,\dot{\mathbf{p}} - H\,\dot{\mathbf{r}},$$

dove abbiamo usato l'espressione delle equazioni canoniche in termini delle parentesi di Poisson di coordinate e momenti con l'Hamiltoniana.

La derivata parziale di $\mathbf{K}$ rispetto al tempo è facilmente calcolata:

$$\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{r} = \mathbf{p} - \dot{H}\,\mathbf{r},$$

dove nuovamente abbiamo fatto uso delle equazioni canoniche.

3) Nel caso della paricella libera otteniamo le relazioni

$$\{\mathbf{K},\, H\} = -H\,\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{p}, \qquad\qquad \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{p},$$

da cui immediatamente

$$\dot{\mathbf{K}} = \{\mathbf{K},\, H\} + \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t} = 0.$$