FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2008/2009
Primo appello - Sessione estiva
Lunedì 15 Giugno 2009 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Nel caso più semplice (e trascurando l'ipotesi di incontri che avvengano dopo che la circonferenza è stata percorsa più volte) i primi due viaggiatori percorrono una semicirconferenza di lunghezza πR con velocità u, impiegando quindi un tempo

$$T = \frac{\pi R}{u}.$$

Il terzo viaggiatore, se li incontra in quell'istante, avendo percorso un diametro di lunghezza $2R$ avrà viaggiato alla velocità $u_D = \frac{2u}{\pi}$.

2) Il tempo proprio dei viaggiatori sulla circonferenza è dato dalla relazione relativistica

$$\tau_C = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}T = \sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2}}\pi R.$$

3) In modo del tutto analogo si ricava

$$\tau_D = \sqrt{1 - (\frac{2u}{\pi})^2 \frac{1}{c^2}}T = \sqrt{\frac{\pi^2}{u^2} - \frac{4}{c^2}}R.$$

4) Poiché vale $\tau_c < \tau_D < T$ si verifica che, come previsto, il tempo proprio più breve è quello dei viaggiatori accelerati.

Problema R.2

1) Basta considerare la coppia e^+e^- nel riferimento del suo centro di massa. La massa invariante in questo caso coincide con l'energia totale, che vale semplicemente

$$E_+ + E_- > 2\,m_e,$$

quindi la massa invariante della coppia non può essere nulla, mentre il fotone ha necessariamente massa invariante nulla.

2) Possiamo considerare il processo come un caso di produzione in soglia in cui il fotone è il proiettile, mentre il nucleo costituisce il bersaglio, e i prodotti finali del processo sono il nucleo stesso e la coppia e^+e^-.

Risulta quindi $\Delta M = 2\,m_e$, e dalla formula generale, essendo $m_1 = 0$ ed $m_2 = M$, si ricava facilmente

$$\epsilon^{th} = 2\,m_e[1 + \frac{m_e}{M}].$$

Problema A.1

1) Scriviamo le coordinate del pendolo in termini delle coordinate del punto di sospensione e dell'angolo formato dal pendolo con la verticale:

$$\xi = x(t) + l\,\sin\theta, \qquad\qquad \eta = -l\,\cos\theta.$$

Vale quindi anche:

$$\dot{\xi} = \dot{x}(t) + l\,\cos\theta\,\dot{\theta}, \qquad\qquad \dot{\eta} = l\,\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

La Lagrangiana del sistema è qundi caratterizzata da un solo grado di libertà, in quanto $x(t)$ è una funzione nota del tempo, e vale

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + 2\,l\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,\cos\theta + l^2\,\dot{\theta}^2] + m\,g\,l\,\cos\theta,$$

dove il primo termine in parentesi quadre non influisce sulle equazioni del moto.

2) L'equazione del moto per la variabile θ si ricava immediatamente dalla Lagrangiana e vale in generale:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta.$$

3) Nel caso di piccole oscillazioni, posto $\omega^2 = g/l$ e assumendo per ipotesi $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$, l'equazione si riduce a:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta - \frac{x_0\omega_0^2}{l}\cos(\omega_0 t).$$

Si tratta quindi di un moto armonico forzato, la cui soluzione generale si ottiene con tecniche standard e vale

$$\theta(t) = \frac{x_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t)}{l(\omega^2-\omega_0^2)} + A\,\cos(\omega t + \varphi),$$

dove A e φ sono le costanti arbitrarie presenti nella soluzione dell'equazione omogenea.