FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Primo appello - Sessione estiva
Lunedì 21 Giugno 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) La Lagrangiana di una particella sottoposta a forze assiali conservative assume in coordinate cilindriche, in un riferimento inerziale, la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r).$$

Il passaggio a un riferimento rotante si effettua in questo caso semplicemente con la sostituzione $\dot{\theta} = \dot{\phi} + \omega$, per cui risulta

$$L = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\phi} + \omega)^2 + \dot{z}^2\big) - V(r),$$

e possiamo ricavare le espressioni dei momenti coniugati:

$$p_r = m\,\dot{r}, \qquad p_\phi = m\,r^2(\dot{\phi} + \omega), \qquad p_z = m\,\dot{z}.$$

2) Dalla definizione possiamo quindi ricavare l'Hamiltoniana, che assume le forme (del tutto equivalenti)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V(r) + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\,r^2} - p_\phi\omega,$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V(r) + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{(p_\phi - m\,r^2\omega)^2}{2m\,r^2} - \frac{1}{2}m\,r^2\omega^2.$$

3) Le coordinate ϕ e z sono cicliche, e pertanto la funzione di Routh si ottiene dalla Lagrangiana effettuando la trasformata di Legendre per sostituire le variabili $\dot{\phi}$ e $\dot{z}$ con i corrispettivi momenti coniugati. Ne risulta

$$R = \frac{p_z^2}{2m} - p_\phi\omega + \frac{p_\phi^2}{2m\,r^2} - \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + V(r).$$

La relativa equazione del moto non ha contributi dai primi due termini, e prende la forma

$$m\,\ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{m\,r^3} - \frac{dV}{dr}.$$

4) Per il calcolo dell'integrale conviene usare la seconda forma dell'Hamiltoniana H, e cambiare variabile d'integrazione da p_ϕ a $p'_\phi = p_\phi - m\,r^2\omega$. Facendo ciò gli integrali fattorizzano e risulta

$$I \equiv \int \Pi_i dq_i dp_i \exp -\beta H(q_i, p_i) =$$

$$= \int dr\,dz\,d\phi\, \exp -\beta(V(r,z) - \frac{1}{2} m\,r^2\omega^2) \int dp_r dp_z dp'_\phi\, \exp -\beta(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p'^2_\phi}{2m\,r^2}),$$

da cui

$$I = 2\pi \int r\,dr\,dz\, \exp -\beta(V(r,z) - \frac{1}{2} m\,r^2\omega^2) \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

L'effetto del potenziale $V(r,z)$ é solo quello di restringere il dominio dell'integrazione sulle coordinate, e risulta quindi

$$I = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \pi\,L \int_0^R 2\,r\,dr\, \exp \beta \frac{1}{2} m\,r^2\omega^2 = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \pi\,L\, \frac{\exp \frac{1}{2} m\,R^2\omega^2\beta - 1}{\frac{1}{2} m\,\omega^2\,\beta}.$$

Problema R.1

1) Nel riferimento della sorgente, durante il tempo di volo T dei fotoni emessi dalla sorgente l'astronave si sposta di un tratto vT, e vale quindi per l'angolo di emissione dei fotoni

$$\cos\theta = \frac{v}{c}, \qquad \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Il quadrimpulso dei fotoni é quindi rappresentato dal quadrivettore

$$K_S^\mu = h\left[\nu,\, \beta\,\nu,\, \sqrt{1-\beta^2}\,\nu,\, 0\right],$$

dove si é posto $\beta \equiv v/c$.

Nel riferimento dell'astronave risulta quindi, da una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x

$$K_A^\mu = h\left[\sqrt{1-\beta^2}\,\nu,\, 0,\, \sqrt{1-\beta^2}\,\nu,\, 0\right],$$

come ci si doveva aspettare anche su base geometrica e tenuto conto della dilatazione dei tempi.

2) Nel riferimento della sorgente la direzione dei fotoni rinviati deve necessariamente essere opposta a quella dei fotoni ricevuti dall'astronave, quindi risulta

$$K'^\mu_S = h\left[\nu',\, -\beta\,\nu',\, -\sqrt{1-\beta^2}\,\nu',\, 0\right],$$

e dalla trasformazione di Lorentz si ottiene

$$K'^\mu_A = h\left[\gamma(1+\beta^2)\,\nu',\, -2\,\beta\,\gamma\,\nu',\, -\sqrt{1-\beta^2}\,\nu',\, 0\right].$$

Notiamo che la frequenza in ciascun sistema di riferimento si ricava immediatamente dalla componente temporale del quadrivettore, per cui la condizione richiesta diventa

$$\gamma(1+\beta^2)\,\nu' = \sqrt{1-\beta^2}\,\nu, \qquad\qquad \nu' = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\nu.$$

Dalla geometria del processo di rinvio dei fotoni visto nel riferimento dell'astronave e dal teorema di Pitagora si ricava la relazione

$$(cT_2)^2 = v^2(T_1+T_2)^2 + (cT_1)^2,$$

da cui semplificando si ricava

$$(c^2-v^2)T_2 = (c^2+v^2)T_1, \qquad\qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}.$$

La relazione tra questo risultato e il precedente é una conseguenza abbastanza ovvia della dilatazione dei tempi.

Problema R.2

1) L'espressione dell'energia totale della particella nel caso in esame

$$E = m_0\gamma\, c^2 - \frac{m_0c^2}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2}}.$$

L'energia minima corrisponde al caso di particella in quiete al minimo del potenziale, ovvero nella posizione $x=0$, per cui risulta

$$E_{min} = m_0c^2\Big(1-\frac{1}{\beta}\Big),$$

e poiché $\beta < 1$ risulta $E_{min} < 0$.

2) La frequenza delle piccole oscillazioni si ottiene considerando il limite non relativistico e sviluppando l'energia potenziale per piccoli valori di x:

$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{m_0c^2}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{\beta^3}\alpha^2x^2 = E_{min} + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{1}{2}m_0\omega^2x^2,$$

da cui subito si ricava

$$\omega = \frac{\alpha\, c}{\beta^{\frac{3}{2}}} > \alpha\, c.$$

3) Se $E=0$ vale la relazione

$$\gamma - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2}} = 0,$$

da cui anche

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \alpha^2x^2+\beta^2.$$

Se poniamo per definizione $1 - \beta^2 \equiv \alpha^2 x_0^2$ la relazione ottenuta puó essere riscritta nella forma

$$v^2 = \alpha^2 c^2 (x_0^2 - x^2),$$

e quest'equazione corrisponde alla legge di conservazione dell'energia di un oscillatore armonico di frequenza $\omega_0 = \alpha\, c < \omega$.

La soluzione dell'equazione del moto é in questo caso

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Problema S.1

Il numero degli stati microscopici risulta dalla combinatoria ed é semplicemente

$$\Gamma = \frac{N!}{n_1!\, n_2!},$$

da cui applicando la formula di Stirling e ricordando che $n_1 + n_2 = N$ si ottiene

$$\Gamma \approx \left(\frac{N}{n_1}\right)^{n_1} \left(\frac{N}{n_2}\right)^{n_2},$$

ed é immediato ricavare l'entropia nella forma

$$S = k(n_1 \ln \frac{N}{n_1} + n_2 \ln \frac{N}{n_2}).$$

Se avviene una transizione $n_1 \to n_1 + 1$ e $n_2 \to n_2 - 1$. Tenendo conto del fatto che n_1 ed n_2 sono entrambi molto maggiori di 1 é facile ricavare la variazione di entropia nella forma

$$\Delta S = k(\ln \frac{N}{n_1} - \ln \frac{N}{n_2}) = k \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

Si noti che, effettuando il calcolo senza approssimazioni a partire da Γ, si sarebbe comunque ottenuta la relazione $\Delta S = k \ln \frac{n_2}{n_1+1}$.

La variazione di entropia del termostato si ottiene invece dalla definizione termodinamica, ed é semplicemente

$$\Delta S_T = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{T}.$$

All'equilibrio le due variazioni di entropia devono risultare uguali e opposte, e risulta quindi

$$k \ln \frac{n_2}{n_1} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{T},$$

da cui si ricava facilmente

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\exp -\beta\epsilon_2}{\exp -\beta\epsilon_1}.$$

Problema S.2

L'Hamiltoniana della singola particella vale

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} + mgz.$$

Il calcolo della funzione di partizione canonica si riduce quindi al calcolo di

$$S \int dz \, \exp -\beta\, mgz \int d^3\mathbf{p} \exp -\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m}.$$

Effettuando le integrazioni e ricordando le definizioni si ottiene quindi per la funzione di partizione canonica l'espressione

$$Z = \frac{1}{N!}\Big[\frac{S}{\beta\, mg}\Big(\frac{2\pi\, m}{\beta\, h^2}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]^N.$$

L'energia libera vale quindi

$$F = -k\,T\,\ln Z = -N\,k\,T\left[\ln\Big(\frac{S}{N}\Big) + \frac{5}{2}\ln k\,T + \frac{1}{2}\ln m - \ln g - 3\ln h + 1 + \frac{3}{2}\ln 2\pi\right].$$

L'energia interna si ricava facilmente dalla relazione

$$U = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = \frac{5\,N}{2\beta} = \frac{5}{2}N\,k\,T.$$

La capacitá termica si ricava subito dal risultato precedente:

$$c_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{5}{2}N\,k.$$