Meccanica Quantistica

16 Luglio 2018 (A.A. 17/18)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Una particella di massa m è vincolata a muoversi nell'intervallo $-a \le x \le a$. Al centro è presente un potenziale proporzionale ad una $\delta(x)$:

$$V(x) = g\delta(x) \equiv \frac{\hbar^2}{m}\beta\delta(x) \quad \text{per} \;\; |x| \le a\,; \qquad V(x) = 0 \quad \text{per} \;\; |x| > a\,; \qquad g > 0\,.$$

1) Si scrivano i livelli energetici del sistema per $g = 0$ (senza potenziale a δ) e si specifichino le propietà sotto parità degli autostati.

2) Scrivere l'equazione esatta per gli autovalori dell'energia e dimostrare che la successione fra livelli pari e dispari resta valida anche per $g \neq 0$.

3) Trovare l'energia per i primi due livelli all'ordine più basso (non banale) in β usando il risultato del punto precedente.

4) Verificare il risultato del punto precedente usando la teoria delle perturbazioni.

Problema 2

Una particella di spin 1/2 è si trova (ferma) in un campo magnetico B_0 diretto lungo l'asse z. Il momento magnetico (sperimentale) è $\mu > 0$. Nel seguito si considerino solo i gradi di libertà legati allo spin.

1) Si scriva l'Hamiltoniana, gli autovalori ed i rispettivi autostati.

2) Il sistema sia nello stato fondamentale. Al tempo $t = 0$ si accende molto velocemente (istantaneamente) un secondo campo magnetico, B_1 diretto lungo l'asse x. Qual'è la probabiltà di trovare lo spin invertito rispetto al campo magnetico complessivo?

3) Supponiamo, più realisticamente, che il campo venga acceso con una legge

$$B_1(t) = B_1(1 - e^{-t/\tau}) \tag{1}$$

Si calcoli perturbativamente la probabilità di inversione dello spin in questo caso, cioè la probabilità di trovare lo spin invertito per $t \to +\infty$.

4) Si dica, in linea di principio, cosa bisognerebbe calcolare per avere la probabilità di trovare lo spin invertito rispetto al campo magnetico effettuando una misura al tempo t, nel caso del campo (1). Non è richiesto alcun calcolo esplicito, si chiede solo di indicare la procedura.

Soluzione problema 1

1 In assenza di potenziale e ponendo $E = \hbar^2 k^2/2m$ l'equazione di Schrödinger stazionaria è

$$\psi'' + k^2\psi = 0$$

che ha come soluzioni pari a dispari $\cos(kx), \sin(kx)$. Imponendo $\psi(\pm a) = 0$ si trova la condizione:

$$\cos: \quad ka = n_d \frac{\pi}{2}\,; \qquad \sin: \quad ka = n_p \frac{\pi}{2}$$

dove n_d, n_p sono numeri interi dispari e pari rispettivamente. Le soluzioni normalizzate sono

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(n_d \frac{\pi}{2} x)\,; \quad \frac{1}{\sqrt{a}}\sin(n_p \frac{\pi}{2} x) \tag{2}$$

I conseguenti valori per l'energia sono

$$\text{stati pari: } E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{4a^2} n_d^2\,; \qquad \text{stati dispari: } E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{4a^2} n_p^2$$

Ponendo $L = 2a$ si riconoscono collettivamente i valori

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} n^2\,; \qquad n = 1, 2, 3 \dots \tag{3}$$

La successione $n = 1, 3, 5 \dots$ corrisponde agli stati pari, quella $n = 2, 4, \dots$ a quelli dispari.

2) In presenza del potenziale l'equazione di Schrödinger è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{\hbar^2}{m}\beta\delta(x)\psi(x) = \hbar^2 k^2/2m\psi(x)$$

quindi per $x \neq 0$ si hanno sempre le soluzioni dell'equazione libera, mentre la δ impone la condizione di discontinuità sulla derivata prima in $x = 0$:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = 2\beta\psi(0) \tag{4}$$

Le funzioni dispari precedenti hanno $\psi(0) = 0$, quindi la presenza della δ non cambia la soluzione. Per le funzioni pari basta scrivere la funzione a destra, a sinistra automaticamente, per una funzione pari $\psi(-x) = \psi(x)$, che impone ovviamente $\psi'(-x) = -\psi'(x)$. La generica funzione "libera" che si annulla per $x = a$ ha la forma

$$A\sin(k(x-a))$$

quindi per le funzioni pari la (4) implica

$$2\psi'(0^+) = 2\beta\psi(0)\,; \quad \Rightarrow \quad k\cos(ka) = \beta\sin(-ka) = -\beta\sin(ka)$$

ovvero

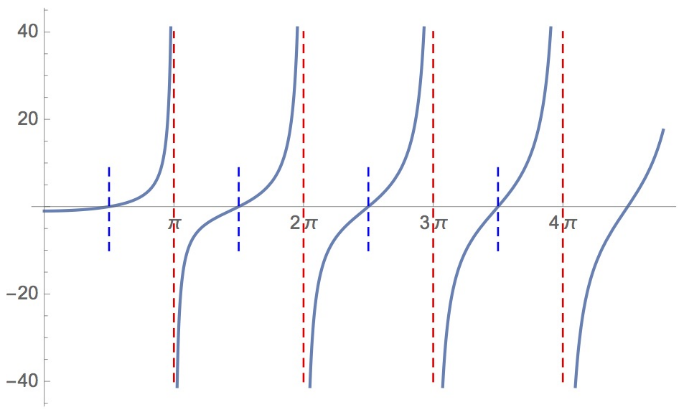
$$k\cot(ka) = -\beta \tag{5}$$

Notiamo che l'analogo vincoloper gli stati dispari è $k\cot(ka) = 0$ con soluzione

$$ka = n_d\frac{\pi}{2}\,; \quad n_d = 1, 3 \dots$$

che riproduce i livelli del punto 1.

Per gli stati pari la soluzione della (5) si ottiene facendo un grafico della funzione $-x\cot x$ e osservano le intersezioni con la retta orizzontale $y = \beta > 0$



Come si vede dalla figura le intersezioni sono comprese rispettivamente negli intervalli:

$$\frac{\pi}{2} \leq ka \leq \pi \, ; \qquad \frac{3}{2}\pi \leq ka \leq 2\pi \ldots$$

verificando che le energie degli stati pari sono intervallate con le energie degli stati dispari, corrispondenti ai punti $ka = n\pi = n_p \frac{\pi}{2}$.

3) Per β piccolo la soluzione è vicina ad uno zero della cotangente, quindi possiamo porre, per il primo stato pari

$$ka = \frac{\pi}{2} + a\delta k$$

Sviluppando in serie la (5)

$$\frac{\pi}{2}\delta k = \beta$$

ed il corrispondente valore dell'energia è

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{2a} + \delta k)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{2a} + \frac{2}{\pi}\beta)^2 \simeq E_1^{(0)} + \frac{\hbar^2}{m}\frac{\beta}{a} \tag{6}$$

4) In teoria perturbativa sullo stato fondamentale (usando le espressioni (2)):

$$\delta E = \langle 0|V|0\rangle = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a}\cos^2(\frac{\pi}{2}x)\,\frac{\hbar^2}{m}\beta\delta(x) = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\beta}{a}$$

in accordo con la (6).

Soluzione problema 2

a) L'Hamiltoniana è

$$H = -\mu B_0 \sigma_z \, .$$

Posto $\hbar\omega_3 = \mu B_0$ i liveli energetici sono $E = \mp\hbar\omega_3$ ed i rispettivi autostati

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

b) La presenza di un campo magnetico B_1 lungo x comporta una nuova Hamiltoniana

$$H' = -\mu B_0 \sigma_z - \mu B_1 \sigma_x$$

il campo magnetico è quindi $\boldsymbol{B} = B_0 \hat{\boldsymbol{z}} + B_1 \hat{\boldsymbol{x}}$, cioè giace nel piano x–y con una inclinazione θ rispetto all'asse z con $\tan\theta = B_1/B_0$. Gli autostati rispetto a questo nuovo campo si ottengono ruotando quelli vecchi di un angolo θ, in senso antiorario, rispetto all'asse y

$$\begin{aligned} \psi_+ &= e^{-i\sigma_y \frac{\theta}{2}} \psi_1 = (\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sigma_y \sin\frac{\theta}{2})\psi_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ \psi_- &= e^{-i\sigma_y \frac{\theta}{2}} \psi_2 = (\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sigma_y \sin\frac{\theta}{2})\psi_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

La probabilità di trovare lo spin *antiallineato* (invertito) rispetto alla direzione del campo $\boldsymbol{B}$ è

$$P = |\langle\psi_-|\psi_1\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} \tag{8}$$

c) Al tempo $t \to +\infty$ l'Hamiltoniana ha la forma

$$H = -\mu B_0 \sigma_z - \mu B_1 \sigma_x$$

che ha come autostati esattamente gli stati $\psi_\pm$ descritti sopra. In teoria perturbativa, siccome il potenziale di perturbazione non si annulla all'infinito, l'ampiezza di probabilità per invertire lo spin è

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{1}{\hbar\omega_{21}} \int_0^\infty e^{i\omega_{21}t} \langle 2|\frac{\partial}{\partial t} H_I(t)|1\rangle dt &= -\frac{1}{2\hbar\omega_0} \int_0^\infty e^{2i\omega_0 t} \frac{1}{\tau} \mu B_1 e^{-t/\tau}\, dt \\ &= -\frac{1}{\hbar\omega_0} \mu B_1 \frac{1}{1 - 2i\omega_0\tau} \end{aligned}$$

La corrispondente probabilità è

$$P = \left(\frac{\mu B_1}{\hbar\omega_0}\right)^2 \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2 + 1}$$

4) Lo stato iniziale ψ_1 evolve nel tempo con una Hamiltoniana dipendente dal tempo

$$H(t) = -\mu B_0 \sigma_z - \mu B_1(t) \sigma_x$$

in uno stato $\psi_1(t) = (c_1(t), c_2(t))$, con $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$. Al tempo t gli stati allineati lungo $\boldsymbol{B}$ sono quelli del punto precedente, cioè gli autostati di $H(t)$, con θ dipendente tal tempo:

$$\tan\theta = \frac{B_1}{B_0}(1 - \exp(-t/\tau))$$

La probabilità richiesta è

$$P = |\langle\psi_-(\theta)|\psi_1(t)\rangle|^2$$