FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Secondo appello - Sessione estiva
Lunedì 5 Luglio 2004 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Se la sorgente emette N particelle al secondo, l'intervallo di tempo tra l'emissione di due particelle successive è $1/N$ secondi. La legge oraria di queste particelle, scegliendo abitrariamente l'origine dei tempi, si può pertanto scrivere nella forma

$$x_1(t) = u\,t \qquad\qquad x_2(t) = u(t - \frac{1}{N}),$$

mentre la legge oraria del ricevitore può essere scritta come

$$X(t) = X_0 + v\,t.$$

Possiamo quindi calcolare le posizioni e i tempi di ricevimento delle due particelle, dalle relazioni

$$u\,t_1 = X_0 + v\,t_1, \qquad\qquad u(t_2 - \frac{1}{N}) = X_0 + v\,t_2,$$

che implicano rispettivamente

$$t_1 = \frac{X_0}{u-v}, \qquad\qquad \bar{x}_1 = \frac{u\,X_0}{u-v},$$

$$t_2 = \frac{X_0 + \frac{u}{N}}{u-v}, \qquad\qquad \bar{x}_2 = \frac{u(X_0 + \frac{v}{N})}{u-v}.$$

Nel riferimento del ricevitore vale quindi

$$t'_1 = \gamma(v)(t_1 - \frac{v}{c^2}\bar{x}_1) = \gamma(v)\frac{X_0}{u-v}(1 - \frac{u\,v}{c^2}),$$

$$t'_2 = \gamma(v)(t_2 - \frac{v}{c^2}\bar{x}_2) = \gamma(v)\frac{X_0}{u-v}(1 - \frac{u\,v}{c^2}) + \frac{\gamma(v)}{u-v}(1 - \frac{v^2}{c^2})\frac{u}{N},$$

e pertanto

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\gamma(v)(u-v)}\frac{u}{N}.$$

Poiché $t'_2 - t'_1$ è l'intervallo tra due ricezioni, il numero di ricezioni al secondo nel rifermento del ricevitore è

$$N' = N\gamma(v)(1 - \frac{v}{u}),$$

espressione che vale ovviamente soltanto per $v < u$.

Si noti che tale risultato differisce dalla frequenza di ricevimento misurata nel riferimento della sorgente (che si ricava da $t_2 - t_1$) soltanto per il fattore $\gamma(v)$ dovuto alla dilatazione dei tempi.

Il risultato ottenuto è perfettamente consistente con la legge di trasformazione dei vettori d'onda per un'onda di frequenza N e velocità di propagazione u.

Problema R.2

Le leggi di conservazione di energia e impulso prendono nel caso in esame la seguente forma:

$$k\,c + M\,c^2 \cosh\theta = k' c + M\,c^2 \cosh\theta',$$

$$k + M\,c \sinh\theta = -k' + M\,c \sinh\theta'.$$

Sommando e sottraendo queste equazioni si ottiene facilmente

$$2k\,c + M\,c^2 e^{\theta} = M\,c^2 e^{\theta'},$$

$$M\,c^2 e^{-\theta} = 2k' c + m\,c^2 e^{-\theta'}.$$

La prima equazione permette di ricavare direttamente θ':

$$\theta' = \theta + \ln\left(1 + \frac{2k}{M\,c} e^{-\theta}\right),$$

da cui sostituendo nella seconda equazione con semplici manipolazioni si ottiene

$$k' = \frac{k\,e^{-2\theta}}{1 + \frac{2k}{M\,c} e^{-\theta}}$$

e in particolare si nota che vale la relazione $k' = e^{-\theta-\theta'} k$.

Il limite di riflessione geometrica corrisponde al caso $\theta' = \theta$, mentre per le frequenze deve valere la formula dell'effetto Doppler longitudinale $k' = e^{-2\theta} k$.

Perché ciò avvenga occorre che sia soddisfatto il vincolo

$$\frac{2k}{M\,c} e^{-\theta} \ll 1,$$

ovvero $k \ll 1/2M\,ce^{\theta}$.

Poiché k trasforma come e^{θ} la condizione trovata è invariante di Lorentz, come ci si aspetta che sia.

Problema A.1

Indichiamo convenzionalmente con gli indici $1, 2, 3$ le coordinate delle particelle secondo l'ordine che esse assumono nella configurazione di equilibrio. Siano x_i le coordinate generiche e x_{i0} le coordinate all'equilibrio. Siano poi l_{ij} le lunghezze di riposo delle molle, che per ipotesi soddisfano le relazioni $l_{ij} = |x_{i0} - x_{j0}|$.

La Lagrangiana del sistema prende quindi la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}K\left[(x_1 - x_2 - l_{12})^2 + (x_2 - x_3 - l_{23})^2 + (x_1 - x_3 - l_{13})^2\right].$$

Effettuiamo ora il cambio di variabili $\eta_i = x_i - x_{i0}$ e otteniamo la nuova forma della Lagrangiana, appropriata per lo studio delle piccole oscillazioni:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2}K\left[(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2\right].$$

L'equazione per le frequenze proprie ω si ottiene imponendo l'annullamento del determinante della matrice

$$-m\omega^2\delta_{ij} + K(3\delta_{ij} - 1).$$

L'equazione risultante è

$$(2k - m\omega^2)^3 - 2k^3 - 3k^2(2k - m\omega^2) = -m\omega^2(m\omega^2 - 3k)^2 = 0.$$

Pertanto le frequenze proprie sono $\omega^2 = 0$ e $\omega^2 = 3k/m$, e alla frequenza non nulla corrispondono due distinti modi normali.

Il modo normale corrispondente alla frequenza 0 è semplicemente il moto libero del centro di massa, e vale quindi $Q_0 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

Gli altri due modi normali sono combinazioni lineari arbitrarie di due modi tipici che possono essere ad esempio

$$Q_1 = \eta_1 - \eta_2, \qquad\qquad Q_2 = 2\eta_3 - \eta_1 - \eta_2.$$

Problema A.2

L'espressione delle quantità assegnate in termini delle varibili canoniche è

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{l} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mu(\frac{\mathbf{p}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{m_2}).$$

Le variabili relative alle due particelle sono tra loro indipendenti. Pertanto, posto $\ell_1 \equiv \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1$ e $\ell_2 \equiv \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2$ vale subito

$$\{\ell_{1i}, \ell_{1j}\} = \epsilon_{ijk}\ell_{1k}, \qquad\qquad \{\ell_{2i}, \ell_{2j}\} = \epsilon_{ijk}\ell_{2k}$$

e inoltre $\{\ell_{1i}, \ell_{2j}\} = 0$.

Da queste relazioni consegue banalmente che, essendo $\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2$, vale

$$\{L_i, L_j\} = \{\ell_{1i}, \ell_{1j}\} + \{\ell_{2i}, \ell_{2j}\} = \epsilon_{ijk} L_k.$$

Per quanto riguarda le parentesi di Poisson tra le componenti di $\mathbf{l}$, bisogna notare che, per l'indipendenza delle variabili, la sottrazione di una di esse dall'altra implica, dal punto di vista della prima, una semplica traslazione, che è una trasformazione canonica e pertanto non cambia le parentesi di Poisson. Indicando poi con un indice numerico le parentesi riferite a una singola coppia sappiamo che vale in generale $\{X, Y\} = \{X, Y\}_1 + \{X, Y\}_2$ e, per quanto sopra detto, è immediato ricavare le relazioni

$$\{l_i, l_j\}_1 = \frac{\mu}{m_1} \epsilon_{ijk} l_k, \qquad \{l_i, l_j\}_2 = \frac{\mu}{m_2} \epsilon_{ijk} l_k.$$

Sommando queste relazioni, e notando che per definizione di μ vale $\frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m_2} = 1$, si ricava immediatamente

$$\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k.$$

Per lo stesso motivo si ottengono anche facilmente le relazioni

$$\{\ell_{1i}, l_j\} = \frac{\mu}{m_1} \epsilon_{ijk} l_k, \qquad \{\ell_{2i}, l_j\} = \frac{\mu}{m_2} \epsilon_{ijk} l_k,$$

da cui subito sommando si ricava

$$\{L_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k.$$

Per verificare la canonicità della trasformazione indicata basterà verificare l'invarianza delle parentesi fondamentali. Considerando soltanto le parentesi non banali, e notando che vale

$$\mathbf{R} = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}_1 + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \qquad \mathbf{p} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{p}_1 - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{p}_2,$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\{R_i, P_j\} &= \frac{\mu}{m_2} \delta_{ij} + \frac{\mu}{m_1} \delta_{ij} = \delta_{ij}, \\
\{R_i, p_j\} &= \frac{\mu}{m_2} \frac{\mu}{m_1} \delta_{ij} - \frac{\mu}{m_1} \frac{\mu}{m_2} \delta_{ij} = 0, \\
\{r_i, P_j\} &= \delta_{ij} - \delta_{ij} = 0, \\
\{r_i, p_j\} &= \frac{\mu}{m_1} \delta_{ij} + \frac{\mu}{m_2} \delta_{ij} = \delta_{ij},
\end{aligned}$$

e pertanto la trasformazione è canonica.

Si noti che $\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}$ è il momento angolare del centro di massa del sistema di due corpi, e pertanto sommato al momento angolare del moto relativo $\mathbf{l}$ deve dare il momento angolare totale $\mathbf{L}$. Tale relazione si può verificare anche mediante calcolo diretto.

Si può poi argomentare che $\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}$ ha la struttura di un momento angolare nelle variabili canoniche $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$, e quindi le sue parentesi di Poisson sono quelle del momento angolare, oppure si può effettuare il semplice calcolo

$$\{L_i - l_i, L_j - l_j\} = \{L_i, L_j\} - \{l_i, L_j\} - \{L_i, l_j\} + \{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} \big(L_k - 2l_k + l_k\big) = \epsilon_{ijk} \big(L_k - l_k\big).$$