FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Secondo appello - Sessione estiva
Mercoledì 6 Luglio 2005 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Nel caso dell'effetto Compton, dalla relazione tra quadrivettori $p' = p + k - k'$, calcolando il modulo quadro e sfruttando le proprietà $p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2$ e $k^2 = k'^2 = 0$, si ottiene la relazione invariante

$$k \cdot p - k' \cdot p - k \cdot k' = 0.$$

Basterà calcolare esplicitamente quest'espressione nel riferimento proposto per ottenere la relazione

$$\nu(E_e + p_e\, c) - \nu'(E_e + p_e\, c\cos\theta) - h\,\nu\,\nu'(1 - \cos\theta) = 0,$$

dove abbiamo posto $p_e\, c \equiv \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}$.

Basterà ora risolvere la relazione per ottenere

$$\nu' = \nu \frac{E_e + p_e\, c}{E_e + p_e\, c\cos\theta + h\,\nu(1 - \cos\theta)}.$$

Quest'espressione può anche essere convertita in una relazione tra le lunghezze d'onda che generalizza il risultato valido per elettroni fermi:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h - p_e\,\lambda}{\frac{E_e}{c} + p_e}(1 - \cos\theta).$$

Problema R.2

Notiamo che, dalla relazione tra rapidità e velocità, posto $u/c = \beta$, si ricava

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = e^{2\theta} = (\omega\tau)^{\frac{2}{3}},$$

da cui risolvendo si ottiene facilmente

$$\beta = \frac{(\omega\tau)^{\frac{1}{3}} - (\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(\omega\tau)^{\frac{1}{3}} + (\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}},$$

e sostituendo si ricava anche

$$\gamma(u) = \frac{1}{2}\left[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}} + (\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\right].$$

Ricorrendo alla definizione di quadrivelocità si ottengono quindi le equazioni differenziali:

$$\frac{dx}{d\tau} = c\beta\gamma = \frac{c}{2}\big[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}} - (\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\big],$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = \frac{1}{2}\big[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}} + (\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\big].$$

Queste equazioni si integrano immediatamente, e il risultato è

$$x(\tau) = \frac{c}{2\omega}\big[\frac{3}{4}(\omega\tau)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}\big],$$

$$t(\tau) = \frac{1}{2\omega}\big[\frac{3}{4}(\omega\tau)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}\big].$$

Questa è la forma parametrica della soluzione che incorpora già le condizioni a contorno assegnate.

La seconda equazione può essere risolta algebricamente per ricavare $(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}$ in funzione di t, e il risultato è

$$(\omega\tau)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{1 + \frac{8}{3}\omega t} - 1.$$

Sostituendo si ricava quindi la legge oraria:

$$x(t) = c\,t + \frac{3\,c}{2\omega}\big[1 - \sqrt{1 + \frac{8}{3}\omega t}\big].$$

Problema A.1

Ricaviamo l'equazione di Eulero-Lagrange notando che vale

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{2\gamma t} m\,\dot{q},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -e^{2\gamma t}\frac{\partial V}{\partial q}.$$

Di conseguenza si ricava l'equazione

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} - 2\gamma m\dot{q},$$

nella quale si riconosce la presenza della forza conservativa derivante dall'energia potenziale $V(q)$ e quella della forza frenante $-2\gamma m\dot{q}$.

A partire dall'espressione ottenuta per p è facile ricavare l'Hamiltoniana nella forma

$$H = e^{-2\gamma t}\,\frac{p^2}{2m} + e^{2\gamma t} V(q).$$

La trasformazione canonica proposta implica

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = e^{\gamma t} q, \qquad\qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = e^{\gamma t} P,$$

da cui anche

$$q = e^{-\gamma t} Q, \qquad\qquad P = e^{-\gamma t} p.$$

Sostituendo nell'Hamiltoniana si ottiene poi

$$K(P,Q,t) = H(e^{\gamma t}P,\, e^{-\gamma t}Q, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t},$$

e dal calcolo diretto si ricava

$$K(P,Q,t) = \frac{P^2}{2m} + e^{2\gamma t} V(e^{-\gamma t}Q) + \gamma Q\,P.$$

L'indipendenza di K dal tempo si ha soltanto nel caso in cui $V(q) = \frac{1}{2}\alpha\, q^2$, con α arbitrario, per cui risulta

$$K(P,Q,t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\alpha\, Q^2 + \gamma Q\,P.$$

Le equazioni canoniche diventano

$$\dot{P} = -\gamma\, P - \alpha\, Q,$$

$$\dot{Q} = \frac{P}{m} + \gamma\, Q,$$

e sono quindi un semplice sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine, che ammettono soluzioni di tipo oscillante (per $\alpha > m\gamma^2$) con frequenza di oscillazione

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m} - \gamma^2}.$$

La soluzione particolare per condizioni iniziali assegnate è

$$P(t) = P_0\big(\cos\omega t - \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\big) - Q_0\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t,$$

$$Q(t) = Q_0\big(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\big) + P_0\frac{1}{m\omega}\sin\omega t.$$

È poi banale riesprimere le soluzioni sotto forma di leggi orarie per le variabili originarie p e q; tali soluzioni hanno la forma di oscillazioni smorzate.

Problema A.2

Poiché vale la relazione

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = V(x_0)$$

se ne può ricavare

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V(x_0) - V(x)},$$

per cui il tempo impiegato a percorrere il tratto da x a x_0 vale

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_x^{x_0}\frac{dx'}{\sqrt{V(x') - V(x_0)}}.$$

Poiché esiste un intorno di x_0 tale per cui

$$V(x) \approx V(x_0) - \frac{1}{2}|V''(x_0)|(x - x_0)^2,$$

trascurando i termini di ordine superiore in $(x - x_0)$ vale nell'intorno, comunque esso sia piccolo

$$\Delta t \approx \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}\int_x^{x_0}\frac{dx'}{|x' - x_0|} = \lim_{\xi\to x_0}\ln\frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \infty.$$