FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Secondo appello - Sessione estiva
Venerdì 30 Giugno 2006 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Le coordinate spaziotemporali dell'evento di emissione del segnale ottico ricevuto all'origine al tempo T mediante il telescopio si ricavano dalla relazione $c(T - T_e) = uT_e$, dove u è la velocità di allontanamento dell'astronave. Si ricava quindi:

$$T_e = \frac{T}{1 + \frac{u}{c}}, \qquad X_e = \frac{uT}{1 + \frac{u}{c}}.$$

La coordinata temporale di questo evento nel riferimento dell'astronave si ricava effettuando una trasformazione di Lorentz, per cui

$$T'_e = \gamma(u)(1 - \frac{u^2}{c^2})\frac{T}{1 + \frac{u}{c}}, \qquad X'_e = 0,$$

risultato che può essere espresso nella forma

$$T'_e = \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}T$$

Problema R.2

Per la validità generale della legge di consevazione dell'energia-impulso relativistica devono sicuramente esistere ulteriori prodotti di decadimento. Affinché si possa asserire che il prodotto di decadimento mancante è unico occorre che la massa invariante associata ai prodotti invisibili del decadimento sia sempre la stessa in tutti i processi. Infatti se venissero prodotte più particelle la loro velocità relativa non sarebbe fissata dai vincoli cinematici, e quindi la massa invariante potrebbe assumere valori differenti entro un intervallo. Se la particella inosservabile è unica la su massa coincide con la massa invariante suddetta, e quindi semplicemente, posto

$$E = \sqrt{P^2 + M^2}, \qquad \epsilon_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}, \qquad \epsilon_2 = \sqrt{p_2^2 + m_2^2},$$

troviamo che l'energia mancante vale $E - \epsilon_1 - \epsilon_2$, mentre l'impulso mancante è ovviamente $\mathbf{P} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$.

Di conseguenza risulta per la massa della terza particella

$$m_3^2 = \epsilon_3^2 - p_3^2 = (E - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2 - (\mathbf{P} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2,$$

e se tale quantità ha un valore costante nei diversi processi osservati l'ipotesi è verificata.

Usiamo per comodità una notazione vettoriale, che ci evita di dover scegliere una particolare terna di riferimento. Poniamo ovviamente l'origine nel centro di simmetria del sistema, che coincide peraltro con la posizione di equilibrio della massa nel caso in cui $L < R$.

Indicando con $\mathbf{r}$ la posizione della massa e con $\pm\mathbf{R}$ le posizioni dei punti di aggancio delle molle, possiamo allora scrivere la Lagrangiana esatta del sistema nella forma

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}K\big(|\mathbf{r}-\mathbf{R}| - L\big)^2 - \frac{1}{2}K\big(|\mathbf{r}+\mathbf{R}| - L\big)^2.$$

Nel regime di piccole oscillazioni dobbiamo considerare soltanto i termini che sono al massimo quadratici nella variabile dinamica $\mathbf{r}$, che rappresenta lo scostamento dal punto di equilibrio. Dallo sviluppo in serie di potenze, in cui facciamo uso della formula

$$\sqrt{1 \pm 2\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2}} \simeq 1 \pm \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2},$$

otteniamo abbastanza facilmente

$$L' = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}^2 - K\Big(r^2 - \frac{L}{R}r^2 + \frac{L}{R^3}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r})^2\Big),$$

dove abbiamo trascurato alcuni termini costanti del tutto irrilevanti.

Scomponiamo ora $\mathbf{r}$ nelle sue componenti longitudinale e trasversa rispetto alla direzione di $\mathbf{R}$, secondo la relazione $\mathbf{r} \equiv \mathbf{l} + \mathbf{t}$, dove vale $\mathbf{l}\cdot\mathbf{R} = 0$ e $\mathbf{l}\cdot\mathbf{t} = 0$. Risulta allora

$$L' = \frac{1}{2}M\big(\dot{l}^2 + \dot{\mathbf{t}}^2\big) - K\big(l^2 + \mathbf{t}^2 - \frac{L}{R}\mathbf{t}^2\big).$$

È quindi immediato riconoscere che l e $\mathbf{t}$ sono coordinate normali, in quanto la Lagrangiana risulta separata in due gruppi di termini indipendenti

$$L' = \frac{1}{2}M\,\dot{l}^2 - K\,l^2 + \frac{1}{2}M\,\dot{\mathbf{t}}^2 - K\big(1 - \frac{L}{R}\big)\mathbf{t}^2.$$

Da questa forma della Lagrangiana è immediato anche riconoscere il valore delle frequenze proprie, che sono

$$\omega_l = \sqrt{\frac{2\,K}{M}}, \qquad\qquad \omega_t = \sqrt{\frac{2\,K}{M}\big(1 - \frac{L}{R}\big)}.$$

Si noti che $\mathbf{t}$, essendo un vettore bidimensionale, è un modo due volte degenere rispetto alla frequenza propria ω_t.

Chiaramente l'annullarsi di ω_t quando $L = R$ è semplicemente il segnale dell'instabilità del punto di equilibrio. Quando $L > R$ il punto di equilibrio si sposta fuori dall'asse congiungente i due punti d'aggancio delle molle e non si possono avere piccole oscillazioni intorno all'origine.

Risulta dal calcolo diretto:

$$\{M_i, L_j\} = \frac{1}{m}\epsilon_{ikl}\,\{p_k\,L_l, L_j\} + \alpha\,\{\frac{r_i}{r}, L_j\}.$$

Notiamo che le parentesi di Poisson delle componenti di $\mathbf{L}$ con una qualunque funzione scalare delle coordinate e dei momenti sono banalmente nulle, come conseguenza dell'invarianza per rotazioni delle quantità scalari (ma la cosa si evince anche dal calcolo diretto). Sarà quindi sufficiente calcolare le seguenti parentesi di Poisson:

$$\{p_k, L_j\} = \epsilon_{jpq}\,\{p_k, r_p\}\,p_q = -\epsilon_{jkq}\,p_q,$$

$$\{L_l, L_j\} = \epsilon_{ljq}\,L_q,$$

$$\{r_i, L_j\} = \epsilon_{jpq}\,\{r_i, p_q\}\,r_p = \epsilon_{jpi}\,r_p.$$

Sostituendo si ottiene quindi

$$\{M_i, L_j\} = \frac{1}{m}\epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jkq}\,(p_l L_q - p_q L_l) + \frac{\alpha}{r}\epsilon_{ijp}\,r_p.$$

Notiamo ora che vale

$$\epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jkq} = \delta_{ij}\,\delta_{lq} - \delta_{iq}\,\delta_{jl},$$

e di conseguenza

$$\{M_i, L_j\} = \frac{1}{m}(p_i L_j - p_j L_i) + \frac{\alpha}{r}\epsilon_{ijp}\,r_p = \epsilon_{ijp}\,\epsilon_{klp}\,p_k\,L_l + \frac{\alpha}{r}\epsilon_{ijp}\,r_p.$$

In conclusione risulta quindi $\{M_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} M_k$, e il teorema che garantisce la conservazione della quantità fisica risultante dalle parentesi di Poisson di due quantità conservate è verificato banalmente.