FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Secondo appello - Sessione estiva
Giovedì 5 Luglio 2007 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

a) Se il segnale è ricevuto lungo l'asse y l'evento di emissione del segnale appare nel riferimento dell'osservatore con coordinate

$$x = 0, \qquad y = d, \qquad t = -\frac{d}{c}.$$

Trasformando al riferimento della sorgente risulta quindi per lo stesso evento

$$x' = \gamma(u)u\frac{d}{c} \qquad y' = d, \qquad t' = -\gamma(u)\frac{d}{c}.$$

Ciò significa che nel riferimento della sorgente il segnale viene emesso formando un angolo con la direzione del moto, il cui valore è determinato dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+\beta^2\gamma^2}} = \beta,$$

dove $\beta \equiv u/c$.

Applicando la formula dell'effetto Doppler relativistico otteniamo quindi

$$\nu' = \nu_0\gamma(u)\big(1 - \beta\cos\theta\big) = \nu_0\gamma(1 - \frac{u^2}{c^2}) = \frac{\nu_0}{\gamma}.$$

b) Per quanto detto in precedenza vale $\cos\theta = \beta$.

c) lo spazio percorso dal segnale nel riferimento della sorgente è

$$\sqrt{\beta^2\gamma^2 d^2 + d^2} = \gamma\, d.$$

Risulta pertanto nel riferimento della sorgente $\Delta t_0 = \gamma\frac{d}{c}$, mentre nel riferimento dell'osservatore vale semplicemente

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{\Delta t_0}{\gamma}.$$

Problema R.2

a) La sovrapposizione di due onde e.m. di tipo sinusoidale, collineari, opposte di uguale ampiezza è in generale esprimibile con la formula

$$A\,\{\cos[k_1(x-ct)+\varphi_1]+\cos[k_2(x+ct)+\varphi_2]\},$$

ma un'opportuna scelta dell'origine delle coordinate spaziali e temporali permette di eliminare le fasi φ_1 e φ_2 dall'espressione precedente.

Dobbiamo quindi trovare una trasformazione di Lorentz che renda l'onda stazionaria. Per sostituzione diretta di una trasformazione generica risulta

$$A\,\{\cos[k_1\gamma(1-\frac{u}{c})(x'-ct')]+\cos[k_2\gamma(1+\frac{u}{c})(x'+ct')]\},$$

in perfetto accordo con le leggi dell'effetto Doppler relativistico.

Definiamo quindi $k_1'\equiv k_1\gamma(1-\frac{u}{c})$ e $k_2'\equiv k_2\gamma(1+\frac{u}{c})$, per cui vale per l'ampiezza dell'onda l'espressione

$$A\,\{\cos k_1'x'\,\cos k_1'ct'+\sin k_1'x'\,\sin k_1'ct'+\cos k_2'x'\,\cos k_2'ct'-\sin k_2'x'\,\sin k_2'ct'.$$

La condizione di stazionarietà corrisponde all'esistenza di nodi, e può essere realizzata imponendo semplicemente $k_1'=k_2'$, per cui l'onda appare della forma $2\,A\,\cos k_1'x'\,\cos k_1'ct'$.

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$k_1\gamma(1-\frac{u}{c})=k_2\gamma(1+\frac{u}{c}),$$

che è risolta da

$$\frac{u}{c}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}.$$

b) È immediato ricavare quindi anche $\gamma(u)=\frac{k_1+k_2}{2\sqrt{k_1k_2}}$, da cui sostituendo si ottiene

$$k_1'=k_2'=\sqrt{k_1k_2}.$$

c) Il centro di massa di un sistema di due fotoni si comporta come una particella di quadrimpulso $P^\mu=h(K_1^\mu+K_2^\mu$, che ha componenti

$$P^0=h(k_1+k_2),\qquad\qquad P^1=h(k_1-k_2).$$

Pertanto la velocità del centro di massa è

$$\frac{U}{c}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2},$$

e coincide con la velocità del riferimento in cui l'onda è stazionaria.

Problema A.1

a) Conviene sviluppare l'espressione del vettore di Lenz notando che vale

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} \equiv \mathbf{p} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = (\mathbf{p}^2)\mathbf{r} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}.$$

Possiamo quindi calcolare le parentesi di Poisson delle componenti di $\mathbf{M}$ in modo diretto, notando che vale

$$\frac{\partial M_i}{\partial r_a} = \frac{p^2}{m}\delta_{ia} - \frac{p_i p_a}{m} + \frac{\alpha}{r}\delta_{ia} - \frac{\alpha}{r^3} r_i r_a,$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial p_a} = 2\frac{r_j p_a}{m} - \frac{pr}{m}\delta_{ja} - \frac{p_j r_a}{m},$$

e pertanto per sostituzione si ottiene

$$\sum_a \left(\frac{\partial M_i}{\partial r_a}\frac{\partial M_j}{\partial p_a} - \frac{\partial M_i}{\partial p_a}\frac{\partial M_j}{\partial r_a}\right) = (r_j p_i - r_i p_j)\left(\frac{p^2}{m^2} + \frac{2\,\alpha}{m\,r}\right) = -\frac{2}{m}\left(\frac{p^2}{2\,m} + \frac{\alpha}{r}\right)\epsilon_{ijk} L_k,$$

come si voleva dimostrare.

b) Vale la relazione

$$\mathbf{M}^2 = \left(\frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}}{m}\right)^2 + 2\,\alpha\,\frac{\mathbf{r}}{r}\left(\frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}}{m}\right) + \alpha^2 = \frac{\mathbf{p}^2\,\mathbf{L}^2}{m^2} + 2\,\frac{\alpha}{r}\frac{\mathbf{L}^2}{m} + \alpha^2,$$

da cui immediatamente

$$\mathbf{M}^2 = \frac{2\,\mathbf{L}^2}{m} H + \alpha^2.$$

c) È immediato verificare che con la normalizzazione adottata vale

$$\{N_i,\, N_j\} = \epsilon_{ijk} L_k,$$

e vale inoltre, per le proprietà dei vettori

$$\{L_i,\, N_j\} = \epsilon_{ijk} N_k,$$

$$\{N_i,\, L_j\} = \epsilon_{ijk} N_k.$$

Combinando i risultati precedenti è semplice verificare che

$$\{L_i \pm N_i, L_j \pm N_j\} = \epsilon_{ijk}(2\,L_k \pm 2\,N_k),$$

da cui segue immediatamente il risultato richiesto.

Vale inoltre, con le stesse procedure di calcolo, la relazione

$$\{L_i + N_i, L_j - N_j\} = 0.$$

d) Dalle definizioni date e dai risultati precedenti segue immediatamente

$$\mathbf{L}^2 + \mathbf{N}^2 = -\frac{m\,\alpha^2}{2\,H}.$$

Ma notiamo che vale

$$\mathbf{J}_\pm^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{N}^2) = -\frac{m\,\alpha^2}{8\,H},$$

da cui subito

$$H = -\frac{m\,\alpha^2}{8\,\mathbf{J}^2}.$$