FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Secondo appello - Sessione estiva
Mercoledì 2 Luglio 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Notiamo che le leggi orarie del moto delle due astronavi nel riferimento del laboratorio sono rispettivamente

$$x_1 = u\,t - x_0, \qquad\qquad x_2 = -u\,t + x_0.$$

Conviene determinare la forma trasformata di Lorentz delle leggi orarie. A tal fine notiamo che vale per la prima astronave:

$$x'_1 = -\gamma(u)\,x_0, \qquad\qquad t'_1 = \frac{t}{\gamma(u)} + \gamma(u)\,u\,x_0,$$

da cui è chiaro che, come prevedibile, la sua posizione non dipende dal tempo del secondo riferimento. Per la seconda astronave vale invece:

$$x'_2 = -2\,\gamma(u)\,u\,t + \gamma(u)\,x_0, \qquad\qquad t'_2 = \gamma(u)\,(1+u^2)\,t - \gamma(u)\,u\,x_0,$$

da cui si ricava la relazione tra i due tempi:

$$t = \frac{t'_2 + \gamma(u)\,u\,x_0}{\gamma(u)\,(1+u^2)},$$

e sostituendo si trova la legge oraria della seconda astronave nel secondo riferimento:

$$x'_2 = -\frac{2\,u}{1+u^2}t'_2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\gamma(u)\,x_0.$$

È immediato verificare che la legge oraria ottenuta è coerente con la legge di composizione relativistica delle velocità, e si ottiene subito anche il risultato cercato per le posizioni iniziali delle astronavi:

$$x'_{10} = -\gamma(u)\,x_0, \qquad\qquad x'_{20} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\gamma(u)\,x_0.$$

2) Si può cercare il tempo dell'incontro nel secondo riferimento uguagliando le leggi orarie delle astronavi, e trovando in questo modo la soluzione

$$T' = \frac{\gamma(u)\,x_0}{u}.$$

Più semplicemente basta effettuare la trasformazione di Lorentz dell'evento d'incontro nel primo riferimento, notando che l'incontro avviene nell'origine al tempo $T = \frac{x_0}{u}$.

Problema R.2

1) Si potrebbe affrontare il problema invertendo la relazione che esprime l'energia di soglia in funzione della differenza di massa $\Delta M \equiv M - m_1 - m_2$, ma più semplicemente basta osservare che alla soglia tutte le particelle prodotte si muovono alla stessa velocità, che è quella del centro di massa, e pertanto il quadrato della loro massa a riposo totale M^2 coincide con l'energia totale nel centro di massa del sistema P^2, dove $P = p_1 + p_2$ è il quadrimpulso totale.

Risulta quindi, calcolando il prodotto scalare invariante nel riferimento del laboratorio in cui il bersaglio è fermo e il proiettile ha energia di soglia E

$$M^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\,p_1 p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\,E\,m_2,$$

ovvero

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\,E\,m_2}.$$

2) L'energia dei fotoni varia necessariamente al variare dell'energia iniziale, e poichè l'energia di soglia è la minima energia alla quale può avvenire il processo inelastico, alla soglia i fotoni avranno la minima energia possibile. ma poichè i fotoni non hanno massa a riposo la loro minima energia possibile è zero (fotoni "soffici"), e pertanto qualunque sia il numero dei fotoni emessi l'energia di soglia non cambia rispetto al risultato precedente.

Problema A.1

Notiamo innanzitutto che in generale, dato un vettore della forma $v_i = f(q)\,p_i + g(p)\,q_i$, dove f e g sono funzioni scalari dei propri argomenti, il calcolo delle parentesi di Poisson tra due componenti del vettore si può effettuare applicando le proprietà fondamentali delle parentesi di Poisson:

$$\{q_i,\, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{q_i,\, g(p)\} = \frac{p_i}{p} g'(p), \qquad \{p_i,\, f(q)\} = -\frac{q_i}{q} f'(q).$$

Di conseguenza si ottiene in generale

$$\{v_i,\, v_j\} = \Big(\frac{f\,f'}{q} + \frac{g\,g'}{p} + \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\,f'\,g'}{q\,p}\Big)(p_i q_j - p_j q_i).$$

Notiamo anche che, essendo il momento angolare $L_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k$, vale $p_i q_j - p_j q_i = \epsilon_{jik} L_k$.

1) Nel primo caso vale $f = c\,t$ e $g = \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$, pertanto $f' = 0$ e $g\,g' = p$. Di conseguenza è immediato ricavare

$$\{K_i,\, K_j\} = \epsilon_{jik} L_k.$$

2) Nel caso in cui $f = q$ e $g = 0$ si ottiene $f\,f' = q$ e di conseguenza

$$\{r\,p_i,\, r\,p_j\} = \epsilon_{jik} L_k.$$

Analogamente nel caso in cui $f = 0$ e $g = p$ risulta $g\,g' = p$ da cui nuovamente

$$\{p\,r_i,\, p\,r_j\} = \epsilon_{jik} L_k.$$