FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2008/2009
Secondo appello - Sessione estiva
Lunedì 6 Luglio 2009 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Dalla legge oraria è immediato ricavare la relazione

$$\frac{dx}{d\tau} = a\,\tau = u\,\gamma(u)$$

che lega la velocità istantanea u al tempo proprio .

Risolvendo per u l'equazione così ottenuta si ricava

$$u(\tau) = \frac{a\,\tau}{\sqrt{1+\frac{a^2\tau^2}{c^2}}}, \qquad\qquad \gamma(\tau) = \sqrt{1+\frac{a^2\tau^2}{c^2}}.$$

È quindi possibile integrare l'equazione

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)$$

ottenendo (con le condizioni iniziali assegnate)

$$t = \frac{1}{2}\tau\sqrt{1+\frac{a^2\tau^2}{c^2}} + \frac{c}{2\,a}\ln\Big[\frac{a\,\tau}{c} + \sqrt{1+\frac{a^2\tau^2}{c^2}}\Big].$$

2) La condizione che τ sia sufficientemente piccolo corrisponde alla disuguaglianza $a\,\tau << c$, nel qual caso vale $t \approx \tau$ e di conseguenza

$$x(t) \approx \frac{1}{2}a\,t^2,$$

che è la legge oraria del moto uniformemente accelerato.

La condizione che τ sia sufficientemente grande corrisponde invece alla disuguaglianza $a\,\tau >> c$, nel qual caso vale $c\,t \approx \frac{1}{2}a\,\tau^2$.

Di conseguenza risulta in questo regime approssimativamente

$$x(t) \approx c\,t$$

che è quanto dovevasi dimostrare.

1) La produzione in soglia comporta che mesone e particella bersaglio viaggiano dopo la collisione alla stessa velocità V (che è la velocità del centro di massa del sistema fotone-bersaglio).

In questo caso le leggi di conservazione prendono la semplice forma (in unità $c = 1$)

$$k + M = \gamma(V)(M + m), \qquad\qquad k = V\,\gamma(V)(M + m),$$

dove k indica il valore dell'energia di soglia del fotone.

Semplici passaggi algebrici permettono di risolvere le equazioni precedenti per k e V, ottenendo

$$k = m\Big(1 + \frac{m}{2\,M}\Big), \qquad\qquad V = \frac{k}{M + k}.$$

È utile ricavare un'espressione esplicita per $\gamma(V)$, che prende la forma

$$\gamma = \frac{M^2 + (M + m)^2}{2\,M\,(M + m)}.$$

2) Trattandosi del decadimento in due corpi di una particella di massa m dotata di velocità V la relazione che descrive le energie massima e minima dei fotoni prodotti nel decadimento di mesoni prodotti in soglia si ricava facilmente notando che nel riferimento del centro di massa i fotoni prodotti hanno entrambi energia e impulso pari a $m/2$, e passando nel riferimento del laboratorio, in cui per il caso estremo di fotoni collineari l'energia è data da

$$\epsilon_\pm = \gamma(V)\frac{m}{2}(1 \pm V).$$

Utilizzando le formule ricavate nella ripsosta precedente si ottiene quindi

$$\epsilon_\pm = \frac{m}{2}\frac{M + k \pm k}{M + m},$$

e con semplici sostituzioni si ricava

$$\epsilon_+ = \frac{m}{2}\frac{M + m}{M}, \qquad\qquad \epsilon_- = \frac{m}{2}\frac{M}{M + m}.$$

Problema A.1

1) Introducendo una funzione energia potenziale $V(\mathbf{r})$ per rappresentare nel formalismo lagrangiano le forze conservative agenti tra due particelle connesse dal vettore posizione $\mathbf{r}$, e attribuendo le coordinate cartesiane $\mathbf{r}_i$ alle particelle del sistema la lagrangiana piò essere scritta nella forma

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}.$$

Scriviamo ora le coordinate $\mathbf{s}_i$ delle particelle nel riferimento che cade liberamente insieme alle particelle stesse

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2,$$

da cui anche

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2, \qquad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{g}\,t.$$

Sostituendo nella Lagrangiana otteniamo

$$L' = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{s}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + \frac{d}{dt}\Big[\sum_i m_i \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{g}\,t + \frac{1}{3}\sum_i m_i \mathbf{g}^2 t^3\Big].$$

Notando che i termini corrispondenti a una derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate e del tempo sono ininfluenti nella Lagrangiana abbiamo quindi ottenuto la trasformazione desiderata.

2) Nel formalismo Hamiltoniano vale inizialmente

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}.$$

Consideriamo ora la trasformazione

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\mathbf{g}\,t^2, \qquad \mathbf{P}_i = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{g}\,t,$$

generata dalla funzione generatrice

$$F_2(\mathbf{r}_i,\, \mathbf{P}_i) = \sum_i \Big(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{P}_i + m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}\,t - \frac{1}{2}\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{g}\,t^2\Big),$$

e pertanto canonica per costruzione.

La sostituzione nell'Hamiltoniana, tenuto anche conto del fatto che

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \sum_i \Big(m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g} - \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{g}\,t\Big),$$

produce la nuova Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\mathbf{P}_i^2}{m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathbf{g}^2 t^2,$$

che, a parte l'ininfluente termine finale (che rappresenta l'energia cinetica del centro di massa del sistema) genera le equazioni del moto che ci aspetteremmmo dal passaggio al formalismo Hamiltoniano per la Lagrangiana trasformata.