FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Secondo appello - Sessione estiva
Lunedì 12 Luglio 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Si possono indicare con x_1 e x_2 le coordinate corrispondenti alle posizioni delle due particelle di massa m. La posizione della massa M risulta allora determinata dal vincolo, e risulta

$$x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad z_M = \pm\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2},$$

dove il simbolo $\pm$ corrisponde al fatto che M può trovarsi sia più in alto che più in basso dell'asse X.

Ai fini del problema è molto conveniente passare alle coordinate corrispondenti al centro di massa e alla distanza tra le masse m, introducendo

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad Q = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

In termini delle nuove coordinate vale

$$x_1 = X - Q, \qquad x_2 = X + Q, \qquad x_M = X, \qquad z_M = \pm\sqrt{L^2 - Q^2}.$$

È quindi possibile scrivere la Lagrangiana del sistema nella forma

$$L_{tot} = m(\dot{X}^2 + \dot{Q}^2) + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \frac{Q^2\dot{Q}^2}{L^2 - Q^2}) - \frac{1}{2}K(2Q - l)^2 \mp Mg\sqrt{L^2 - Q^2}.$$

È immediato notare il disaccoppiamento del moto (rettilineo uniforme) del centro di massa descritto da

$$L_{cm} = (m + \frac{1}{2}M)\dot{X}^2,$$

mentre la dinamica del moto relativo è descritta da

$$L_{rel} = m\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}M\frac{Q^2\dot{Q}^2}{L^2 - Q^2} - \frac{1}{2}K(2Q - l)^2 \mp Mg\sqrt{L^2 - Q^2}.$$

2) La condizione di minimo dell'energia potenziale si ricava immediatamente dalla Lagrangiana esatta e ha la forma

$$4K(Q - \frac{l}{2}) = \pm\frac{MgQ}{\sqrt{L^2 - Q^2}},$$

ovvero, introducendo la variabile R e la variabile ausiliaria $q = Q/L$,

$$q - \frac{l}{2L} = \pm\frac{R}{4}\frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Nell'ipotesi che $l/L << 1$ e $R << 1$ la posizione di equilibrio stabile corrisponde a valori di q molto minori di 1, ed è facile allora risolvere in modo approssimato l'equazione trovando rispettivamente

$$q_\pm = \frac{l}{2L}\frac{1}{1 \mp \frac{R}{4}}. \qquad Q_\pm = \frac{1}{2}\frac{l}{1 \mp \frac{R}{4}}.$$

Si noti che nel caso in cui $z_M < 0$ il risultato è coerente con l'ipotesi $q << 1$ anche per valori di R che non soddisfano la condizione $R << 1$.

Nel caso in cui $z_M > 0$ la condizione $R << 1$ è invece necessaria per la coerenza del risultato, ed esiste anche una posizione di equilibrio instabile con $q \approx 1$, che però non interessa ai fini del problema.

Per completezza osserviamo che la condizione per cui le due posizioni di equilibrio, stabile e instabile, vanno a coincidere può essere determinata analiticamente e si verifica quando

$$\frac{R}{4} = \left[1 - (l/2L)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}, \qquad q_+ = (l/2L)^{\frac{1}{3}},$$

e per valori di R ancora maggiori non esistono posizioni di equilibrio con $q > 0$.

3) Per lo studio delle piccole oscillazioni introduciamo la variabile $\eta_\pm = Q - Q_\pm$, sostituiamo nella Lagrangiana esatta e sviluppiamo al secondo ordine in $\eta_\pm$:

$$L_{rel} \approx \big(m + \frac{1}{2}\frac{MQ_\pm^2}{L^2 - Q_\pm^2}\big)\dot\eta_\pm^2 - 2K\big(1 \mp \frac{L^3 R}{4(L^2 - Q_\pm^2)^{\frac{3}{2}}}\big)\eta_\pm^2 =$$

$$= \big(m + \frac{1}{2}\frac{Mq_\pm^2}{1 - q_\pm^2}\big)\dot\eta_\pm^2 - 2K\big(1 \mp \frac{R}{4(1 - q_\pm^2)^{\frac{3}{2}}}\big)\eta_\pm^2.$$

Ricordando che $q_\pm$ è proporzionale a l/L e trascurando pertanto le potenze di $q_\pm$ è quindi immediato ricavare per la frequenza delle piccole oscillazioni i valori

$$\omega_\pm^2 = \frac{2K}{m}(1 \mp \frac{R}{4}) = \frac{2K}{m} \mp \frac{M}{2m}\frac{g}{L},$$

in cui riconosciamo i contributi della frequenza della molla e della frequenza di pendolo.

Problema R.1

1) L'impulso di una particella relativistica che si muove in una dimensione con velocità u (nel riferimento di quiete della scatola vale $p = m\gamma(u)u$. Nell'urto perfettamente elastico con una parete di massa infinita l'impulso cambia verso ma conserva il modulo (per la conservazione dell'energia). Pertanto l'impulso trasferito alla parete per un singolo urto vale $\Delta p = 2m\gamma(u)u$.

Il numero di urti per unità di tempo ν si calcola tenendo conto del fatto che la particella, tra un urto e l'altro contro la stessa parete, deve percorrere il doppio della lunghezza della scatola a velocità u. Risulta quindi $\nu = u/2L$.

Di conseguenza l'impulso medio trasferito per unità di tempo F vale

$$F = \nu\Delta p = \frac{m\gamma(u)u^2}{L}.$$

2) Nel riferimento nel quale la scatola si muove con velocità v la particella viaggia con velocità diverse nelle due direzioni. I valori delle velocità sono rispettivamente

$$u'_+ = \frac{v+u}{1+\frac{uv}{c^2}}, \qquad u'_- = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}.$$

Notando poi che vale:

$$\gamma(\frac{v \pm u}{1 \pm \frac{uv}{c^2}}) = \gamma(u)\gamma(v)(1 \pm \frac{uv}{c^2})$$

si ricava subito per i corrispondenti impulsi la relazione

$$p'_\pm = m\gamma(u)\gamma(v)(v \pm u),$$

(che poteva essere ricavata anche dalla legge di trasformazione del quadrimpulso), e di conseguenza

$$\Delta p' \equiv p'_+ - p'_- = 2m\gamma(u)\gamma(v)u = \gamma(v)\Delta p.$$

3) Nel riferimento in cui la scatola si muove, una particella che parte da una parete (posta per comodità di calcolo all'origine) all'istante $t = 0$ ritorna alla stessa parete all'istante trasformato dell'evento $(2L/u, 0)$, ossia all'istante $\gamma(v)2L/u$. Risulta quindi $\nu' = \nu/\gamma(v)$.

È ora immediato ricavare l'impulso medio trasferito alla parete in questo riferimento, notando che

$$F' = \nu'\Delta p' = \nu\Delta p = F.$$

Il risultato ottenuto è coerente con la definizione di forza relativistica e con la legge di trasformazione per cui la forza longitudinale assume in tutti i riferimenti il valore assunto nel riferimento di quiete istantanea dell'oggetto su cui si esercita la forza.

Problema R.2

1) L'energia totale del sistema è data dall'espressione

$$E = m\gamma(\dot{x})c^2 - \frac{mc^2}{\sqrt{1-(A-Bx^2)^2}}.$$

La condizione di minimo dell'energia si ha quando la particella è ferma nel minimo del potenziale.

Poiché vale

$$\frac{dU}{dx} = 2mc^2 \frac{Bx(A-Bx^2)}{\big(1-(A-Bx^2)^2\big)^{\frac{3}{2}}}$$

i valori estremi si hanno per $x = 0$ e per $x = \sqrt{A/B}$, ma è facile convincersi che soltanto il primo dei due valori corrisponde a un minimo.

È quindi immediato ricavare

$$E_{min} = mc^2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\Big) < 0.$$

2) Se vale $E = 0$ allora deve necessariamente risultare

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - (A - Bx^2)^2,$$

da cui si ricava facilmente

$$\frac{u}{c} = A - Bx^2.$$

Conviene porre $A/B \equiv x_0^2$, per cui si tratta di risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = cB(x_0^2 - x^2).$$

La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali assegnate è

$$x(t) = x_0 \tanh(Bx_0 ct).$$

3) Tenuto conto del fatto che nel caso in cui $E = 0$ vale

$$\frac{u}{c} = A\big(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\big)$$

e che $-x_0 < x < x_0$, affinché il moto sia sempre non relativistico è sufficiente la condizione $A << 1$.

Problema S.1

1) Affinché il sistema abbia energia E occorre che esattamente $n = E/\epsilon$ componenti si trovino nello stato di energia ϵ. Il corrispondente numero di stati microscopici è

$$\Gamma = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Utilizzando la formula di Stirling si ottiene

$$\Gamma \approx \frac{N^N}{n^n (N-n)^{N-n}} = \left(\frac{n}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{n-N}.$$

Il valore dell'entropia è pertanto

$$S = -kn \ln\left(\frac{n}{N}\right) + k(n-N) \ln\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Dovendo esplicitare la dipendenza da N, E ed ϵ conviene introdurre la combinazione $x \equiv n/N = E/N\epsilon$. Risulta allora

$$S = -Nk\left[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)\right].$$

2) Possiamo ricavare β dalla relazione

$$\beta = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{dx}\frac{S}{Nk} = \frac{1}{\epsilon}\ln\frac{1-x}{x}.$$

3) Nel formalismo canonico possiamo calcolare la funzione di partizione mediante la formula

$$Z = \Sigma_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{-\beta n \epsilon} = \left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right)^N,$$

da cui è immediato ricavare l'energia libera

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = -NkT \ln\left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right).$$

4) L'energia interna è legata all'energia libera dalla relazione

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = \frac{N\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1}.$$

Passando alla variabile intensiva x risulta quindi

$$x = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1},$$

da cui immediatamente

$$e^{\beta\epsilon} = \frac{1-x}{x},$$

coerente con il risultato precedente.

Problema S.2

1) Introduciamo una coordinata x perpendicolare alle piastre del condensatore e quindi scriviamo l'Hamiltoniana per una particella carica:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + qEx,$$

dove, detta D la distanza tra le piastre, vale $E = \Delta/D$.

La funzione di partizione canonica si ottiene integrando sullo spazio delle fasi. Per una singola particella vale

$$\int d^3\mathbf{p} \exp -\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \int d^3\mathbf{r} \exp -\beta qEx = \Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{D} \Big(\frac{1 - e^{-\beta qED}}{\beta qE}\Big).$$

La funzione di partizione canonica vale pertanto

$$Z = \frac{1}{N!} \Big[\big(\frac{2\pi m}{\beta}\big)^{\frac{3}{2}} V \big(\frac{1 - e^{-\beta q\Delta}}{\beta q\Delta}\big) \Big]^N,$$

e notiamo che ogni riferimento al parametro ausiliario D è scomparso.

L'energia libera si ottiene immediatamente e vale

$$F = -NkT \ln\Big[\big(\frac{2\pi m}{\beta}\big)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{N} \big(\frac{1 - e^{-\beta q\Delta}}{\beta q\Delta}\big)\Big] - NkT.$$

2) La relazione tra l'energia interna e l'energia libera permette di calcolare

$$U = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = N \Big[\frac{5}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{q\Delta}{e^{\beta q\Delta} - 1} \Big].$$

A sua volta la capacità termica del sistema si ottiene dalla relazione

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = Nk \Big[\frac{5}{2} - \frac{(\beta q\Delta)^2 e^{\beta q\Delta}}{\big(e^{\beta q\Delta} - 1\big)^2} \Big].$$