FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Primo appello - Sessione autunnale
Mercoledì 15 Settembre 2004 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

È immediato calcolare dalla legge oraria del moto la velocità istantanea

$$u \equiv \frac{dx}{dt} = -c \sin \omega t,$$

da cui subito si ottiene anche $\gamma(t) = |\cos \omega t|^{-1}$.

La velocità media è semplicemente il rapporto tra lo spazio totale percorso $\frac{c}{\omega}$ e il tempo impiegato a percorrerlo $\frac{\pi}{2\omega}$, e quindi vale $\frac{2\,c}{\pi}$. Il rapporto $\frac{v_m}{c}$ è quindi $\frac{2}{\pi}$.

La relazione che lega τ a t può essere ricavata calcolando

$$\tau(t) = \int^t \cos \omega t' \, dt' = \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

Corollari di questo risultato sono le relazioni

$$x(\tau) = \frac{c}{\omega}\sqrt{1-\omega^2\tau^2}, \qquad u(\tau) = -c\,\omega\,\tau, \qquad \gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2\tau^2}}.$$

Sostituendo i valori del tempo iniziale e finale si trova facilmente che il tempo proprio totale vale $\frac{1}{\omega}$ e di conseguenza il rapporto tra tempo proprio totale e intervallo di tempo del riferimento vale $\frac{2}{\pi}$.

L'accelerazione si ricava derivando la velocità e vale $a(t) = -\omega\, c \cos \omega t$. Per un moto unidimensionale l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea si ricava facilmente sfruttando l'invarianza del modulo della quadriaccelerazione, da cui si ottiene la relazione $a_0 = \gamma^3 a$, e nel caso specifico vale

$$a_0 = -\frac{\omega\, c}{\cos^2 \omega t} = -\frac{\omega\, c}{1-\omega^2\tau^2}.$$

Problema R.2

L'espressione generale per l'energia di soglia è

$$\varepsilon_{1\ell}^{th} - m_1 = \Delta M \big(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{m_2}\big).$$

Ma nel caso specifico vale $m_1 = 0$, $m_2 = m_e$ e $\Delta M = 2\, m_\mu$. Risulta pertanto

$$\varepsilon_{1\ell}^{th} = 2\, m_\mu \big(1 + \frac{m_\mu}{m_e}\big),$$

mentre il risultato che si ottiene ponendo $\Delta M = 2\, m_e$ è $\varepsilon_{1\ell}^{th} = 4\, m_e$.

Il rapporto tra le due soglie vale quindi $\frac{1}{2}\big(1 + \frac{m_\mu}{m_e}\big)\frac{m_\mu}{m_e}$.

Problema A.1

Gli estremi dell'energia potenziale (che sono le posizioni di equilibrio) sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{dU}{dx} = \lambda x^3 - \mu^2 x \equiv x(\lambda x^2 - \mu^2) = 0.$$

Le soluzioni sono $x = 0$ e $x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, ma calcolando il valore della derivata seconda dell'energia potenziale $3\lambda x^2 - \mu^2$ agli estremi si trova nel primo caso il valore $-\mu^2$ e nel secondo caso il valore $2\mu^2$. Si riconosce quindi che soltanto nel secondo caso si tratta di minimi dell'energia potenziale e quindi di posizioni di equilibrio stabile.

Possiamo ora introdurre nuove coordinate per parametrizzare le piccole oscillazioni intorno ai minimi, ponendo $\eta = x \mp \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$. L'energia potenziale prende allora la forma

$$U(\eta) = \frac{1}{4}\lambda\big(\eta \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\big)^4 - \frac{1}{2}\mu^2\big(\eta \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\big)^2 = \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \sqrt{\lambda}\mu\eta^3 + \mu^2\eta^2 + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}.$$

Pertanto se la massa del sistema è m la frequenza delle piccole oscillazioni vale

$$\omega^2 = \frac{2\mu^2}{m}.$$

Nel caso bidimensionale le condizioni per l'equilibrio sono

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x[\lambda(x^2+y^2) - \mu^2],$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = y[\lambda(x^2+y^2) - \mu^2],$$

ma sono minimi soltanto le soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$.

La soluzione generale dipende da un parametro arbitrario θ_0 e si puøscrivere nella forma

$$x_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\cos\theta_0, \qquad y_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta_0.$$

Per lo studio delle piccole oscillazioni conviene passare a coordinate polari nel piano (x, y) e introdurre coordinate generalizzate (η, θ) definite dalle relazioni $\eta = \rho - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ e $\theta = \varphi - \theta_0$.

Una volta effettuate le sostituzioni si ottiene la seguente forma dell'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}m\big[\dot\eta^2 + (\eta + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}})^2\dot\theta^2\big],$$

mentre l'energia potenziale riprende la stessa forma già ottenuta nel caso unidimensionale.

Si riconosce subito che la variabile θ è ciclica, e pertanto nel linguaggio delle piccole oscillazioni essa corrisponde a un modo normale di frequenza zero. L'analisi della dipendenza dalla variabile η nel regime di piccole oscillazioni rivela invece lo stesso comportamento che nel caso unidimensionale, e pertanto siamo in presenza di un modo normale (radiale) con la stessa frequenza $\omega^2 = \frac{2\mu^2}{m}$.

Problema A.2

Usiamo la seguente notazione compatta per la trasformazione indicata:

$$q_a = \sum_b K_{ab}\sqrt{\frac{2Q_b}{a_b}}\cos P_b, \qquad p_a = \sum_b K_{ab}\frac{1}{2}\sqrt{2Q_b a_b}\sin P_b,$$

dove $K_{ab} = 1$ per $ab = 11, 12, 22$ e $K_{ab} = -1$ per $ab = 21$.

Notiamo subito che per la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}K_{ab}$ l'inversa coincide con la trasposta.

Il calcolo delle derivate si riduce quindi a

$$\frac{\partial q_a}{\partial Q_b} = \frac{1}{2}K_{ab}\sqrt{\frac{2}{Q_b a_b}}\cos P_b, \qquad \frac{\partial q_a}{\partial P_b} = -K_{ab}\sqrt{\frac{2Q_b}{a_b}}\sin P_b,$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial Q_b} = \frac{1}{4}K_{ab}\sqrt{\frac{2a_b}{Q_b}}\sin P_b, \qquad \frac{\partial p_a}{\partial P_b} = \frac{1}{2}K_{ab}\sqrt{2Q_b a_b}\cos P_b,$$

Possiamo quindi ricavare le seguenti relazioni:

$$\{q_a, q_b\} = -\sum_i \frac{1}{a_i}(K_{ai}K_{bi} - K_{bi}K_{ai})\sin P_i \cos P_i = 0,$$

$$\{p_a, p_b\} = \sum_i \frac{a_i}{4}(K_{ai}K_{bi} - K_{bi}K_{ai})\sin P_i \cos P_i = 0,$$

$$\{q_a, p_b\} = \frac{1}{2}\sum_i K_{ai}K_{bi}(\cos^2 P_i + \sin^2 P_i) = \frac{1}{2}\sum_i K_{ai}K_{bi} = \delta_{ab}.$$

Pertanto la trasformazione è canonica, in quanto lascia invarianti tutte le parentesi fondamentali.