FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Primo appello - Sessione autunnale
Martedì 13 Settembre 2005 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

Nel riferimento di quiete della sbarra poniamo uno degli estremi all'origine, per cui le coordinate dell'altro estremo saranno $(l_0 \cos\theta_0,\, l_0 \sin\theta_0)$.

Nel riferimento in cui la sbarra si muove con velocità u nella direzione y le coordinate trasformate si ottengono in generale dalle relazioni

$$x = x_0, \qquad y = \gamma(u)(y_0 + ut_0), \qquad t = \gamma(u)(t_0 + \frac{u}{c^2}y_0),$$

per cui in particolare i punti trasformati degli estremi soddisfano rispettivamente le relazioni:

$$x = 0, \qquad y = \gamma(u)ut_0, \qquad t = \gamma(u)t_0$$

e

$$x = l_0 \cos\theta_0, \qquad y = \gamma(u)(l_0 \sin\theta_0 + ut_0), \qquad t = \gamma(u)(t_0 + \frac{u}{c^2}l_0 \sin\theta_0).$$

Eliminando t_0 nelle relazioni precedenti si ottengono le seguenti leggi orarie per il moto degli estremi della sbarra nel secondo riferimento:

$$x = 0, \qquad y = ut$$

e rispettivamente

$$x = l_0 \cos\theta_0, \qquad y = ut + \frac{l_0}{\gamma(u)} \sin\theta_0.$$

Se ora calcoliamo l'angolo formato dalla sbarra con l'asse delle x troviamo

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_0}{\gamma(u)},$$

che è il risultato prevedibile sulla base delle formule di contrazione delle lunghezze nella direzione del moto.

Scriviamo ora le coordinate degli estremi della sbarra nel terzo riferimento, notando che vale

$$x' = \gamma(v)(x - vt), \qquad y' = y, \qquad t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x).$$

Ripertendo per gli estremi la procedura precedente, otteniamo rispettivamente

$$x' = -\gamma(v)vt. \qquad y' = ut, \qquad t' = \gamma(v)t$$

e

$$x' = \gamma(v)(l_0 \cos\theta_0 - vt), \qquad y' = ut + \frac{l_0}{\gamma(u)}\sin\theta_0, \qquad t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2} l_0 \cos\theta_0).$$

Le leggi orarie risultanti dall'eliminazione di t nelle relazioni precedenti sono rispettivamente

$$x' = -vt', \qquad y' = \frac{ut'}{\gamma(v)}$$

e

$$x' = \frac{l_0 \cos\theta_0}{\gamma(v)} - vt', \qquad y' = \frac{ut'}{\gamma(v)} + \frac{uv}{c^2} l_0 \cos\theta_0 + \frac{l_0 \sin\theta_0}{\gamma(u)}.$$

Calcoliamo ora l'angolo formato con l'asse delle x', ottenendo la relazione

$$\tan\theta' = \frac{uv}{c^2}\gamma(v) + \frac{\tan\theta_0}{\gamma(u)}\gamma(v).$$

Infine sostituendo ricaviamo

$$\tan\theta' = (\tan\theta + \frac{uv}{c^2})\gamma(v),$$

dove nel primo termine si riconosce l'effetto di contrazione delle lunghezze nella direzione del moto, che è presente anche nel limite $u \to 0$, mentre il secondo effetto è un'ulteriore precessione relativistica legata alla composizione dei due moti.

Notiamo anche che l'effetto non dipende in alcun modo da l_0, come del resto era prevedibile.

Problema R.2

L'equazione del moto relativistica $f = \frac{dp}{dt}$ prende in questo caso la forma

$$\frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{d}{dt}\big[m_0 u \gamma(u)\big],$$

da cui sostituendo la soluzione proposta si trova:

$$\gamma(u(x)) = \sqrt{1+x}, \qquad \gamma(u(x))u(x) = c\sqrt{x}$$

e si verifica che

$$\frac{d}{dt}[c\sqrt{x}] = \frac{c}{2\sqrt{x}}u(x) = \frac{c^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{f}{m_0}.$$

Posto $x = \sinh^2\theta$ si ottiene facilmente:

$$\gamma = \cosh\theta, \qquad \gamma u = c\sinh\theta. \qquad u = c\tanh\theta,$$

coerentemente con la definizione di rapidità, e vale

$$\frac{dx}{dt} \equiv \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{2\sinh\theta\cosh\theta}{2\cosh^2\theta}c = c\tanh\theta = u,$$

come si doveva dimostrare.

Problema A.1

Scriviamo le coordinate cartesiane del punto materiale in termini delle coordiante generalizzate:

$$x = a\cos\varphi - b\sin\theta\,\sin\varphi,$$
$$y = a\sin\varphi + b\sin\theta\,\cos\varphi,$$
$$z = b\cos\theta.$$

Calcoliamo quindi le componenti cartesiane della velocità in temini delle coordinate generalizzate e delle loro derivate rispetto al tempo:

$$\dot{x} = -(a\sin\varphi + b\sin\theta\,\cos\varphi)\,\dot{\varphi} - (b\cos\theta\,\sin\varphi)\,\dot{\theta},$$
$$\dot{y} = (a\cos\varphi - b\sin\theta\,\sin\varphi)\,\dot{\varphi} + (b\cos\theta\,\cos\varphi)\,\dot{\theta},$$
$$\dot{z} = -(b\sin\theta)\;\dot{\theta}.$$

Si ottiene quindi l'espressione del modulo quadro della velocità nella forma:

$$v^2 = (a^2 + b^2\sin^2\theta)\,\dot{\varphi}^2 + b^2\,\dot{\theta}^2 + (2ab\cos\theta)\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}.$$

È a questo punto immediato ricavare l'espressione della Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\big[(a^2 + b^2\sin^2\theta)\,\dot{\varphi}^2 + b^2\,\dot{\theta}^2 + (2ab\cos\theta)\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\big] - mgb\,\cos\theta.$$

Gli integrali prini del moto si ottengono notando che φ è una coordinata ciclica e che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, per cui

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m(a^2 + b^2\sin^2\theta)\,\dot{\varphi} + mab\,\cos\theta\,\dot{\theta} = costante,$$

$$E = \frac{1}{2}m\big[(a^2 + b^2\sin^2\theta)\,\dot{\varphi}^2 + b^2\,\dot{\theta}^2 + (2ab\cos\theta)\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\big] + mgb\,\cos\theta = costante.$$

L'Hamiltoniana si ottiene notando che vale

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mb^2\,\dot{\theta} + mab\,\cos\theta\,\dot{\varphi},$$

da cui, invertendo le relazioni, si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{b^2\,p_\varphi - ab\,\cos\theta\,p_\theta}{m(a^2+b^2)b^2\sin^2\theta},$$

$$\dot{\theta} = \frac{(a^2 + b^2\sin^2\theta)\,p_\theta - ab\,\cos\theta\,p_\varphi}{m(a^2+b^2)b^2\sin^2\theta},$$

e sostituendo nell'espressione di E si ricava quindi

$$H = \frac{1}{2m}\frac{b^2\,p_\varphi^2 + (a^2 + b^2\sin^2\theta)\,p_\theta^2 - 2ab\,\cos\theta\,p_\varphi\,p_\theta}{m(a^2+b^2)b^2\sin^2\theta} + mgb\cos\theta.$$

Problema A.2

Usiamo la seguente notazione compatta per la trasformazione indicata:

$$q_a = \sum_b K_{ab}\sqrt{\frac{2Q_b}{a_b}}\cos P_b, \qquad p_a = \sum_b K_{ab}\frac{1}{2}\sqrt{2Q_b a_b}\sin P_b,$$

dove $K_{ab} = 1$ per $ab = 11, 12, 22$ e $K_{ab} = -1$ per $ab = 21$.

Notiamo subito che per la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}K_{ab}$ l'inversa coincide con la trasposta.

Il calcolo delle derivate si riduce quindi a

$$\frac{\partial q_a}{\partial Q_b} = \frac{1}{2}K_{ab}\sqrt{\frac{2}{Q_b a_b}}\cos P_b, \qquad \frac{\partial q_a}{\partial P_b} = -K_{ab}\sqrt{\frac{2Q_b}{a_b}}\sin P_b,$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial Q_b} = \frac{1}{4}K_{ab}\sqrt{\frac{2a_b}{Q_b}}\sin P_b, \qquad \frac{\partial p_a}{\partial P_b} = \frac{1}{2}K_{ab}\sqrt{2Q_b a_b}\cos P_b,$$

Possiamo quindi ricavare le seguenti relazioni:

$$\{q_a, q_b\} = -\sum_i \frac{1}{a_i}(K_{ai}K_{bi} - K_{bi}K_{ai})\sin P_i \cos P_i = 0,$$

$$\{p_a, p_b\} = \sum_i \frac{a_i}{4}(K_{ai}K_{bi} - K_{bi}K_{ai})\sin P_i \cos P_i = 0,$$

$$\{q_a, p_b\} = \frac{1}{2}\sum_i K_{ai}K_{bi}(\cos^2 P_i + \sin^2 P_i) = \frac{1}{2}\sum_i K_{ai}K_{bi} = \delta_{ab}.$$

Pertanto la trasformazione è canonica, in quanto lascia invarianti tutte le parentesi fondamentali.

Sostituendo la trasformazione nell'Hamiltoniana assegnata si ottiene l'Hamiltoniana trasformata:

$$K(Q_a.P_a) = \frac{1}{2}(2Q_1a_1)\sin^2 P_1 + \frac{1}{2}(2Q_2a_2)\sin^2 P_2 + \frac{1}{2}a_1^2(\frac{2Q_1}{a_1})\cos^2 P_1 + \frac{1}{2}a_2^2(\frac{2Q_2}{a_2})\cos^2 P_2,$$

da cui immediatamente

$$K = a_1Q_1 + a_2Q_2.$$

Le nuove equazioni canoniche hanno la forma:

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial K}{\partial P_a} = 0, \qquad \dot{P}_a = -\frac{\partial K}{\partial Q_a} = -a_a,$$

ed è quindi immediato risolverle ottenendo

$$Q_a = Q_{a0}, \qquad P_a = P_{a0} - a_at.$$

La soluzione delle equazioni del moto si ottiene direttamente sostituendo i risultati ottenuti nelle equazioni di trasformazione.