FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Primo appello - Sessione autunnale
Martedì 12 Settembre 2006 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

1) La velocità con cui le galassie A e B si allontanano l'una dall'altra si ottiene dalla legge di composizione relativistica delle velocità, che nel caso specifico diventa

$$u_{AB} = \frac{2\,u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} < c.$$

2) Scriviamo le coordinate spaziotemporali di A al momento dell'emissione del segnale ricevuto sulla Terra al tempo T: $x_A = u\,t_A$, dove t_A è determinato dalla condizione $u\,t_A = c(T - t_A)$, da cui risulta

$$t_A = \frac{T}{1 + \frac{u}{c}}.$$

Con una trasformazione di Lorentz si ottiene subito il tempo proprio:

$$T_A = \gamma(t_A - \frac{u\,x_A}{c^2}) = \frac{t_A}{\gamma} = \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}T.$$

3) Analogamente al caso precedente scriviamo per l'evento di ricevimento del segnale in B: $x_B = u\,t_B$, dove t_B è determinato dalla condizione $u\,t_B = c(t_B - T)$, da cui risulta

$$t_B = \frac{T}{1 - \frac{u}{c}}.$$

Con una trasformazione di Lorentz si ottiene il tempo proprio:

$$T_B = \gamma(t_B - \frac{u\,x_B}{c^2}) = \frac{t_B}{\gamma} = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}T.$$

Notiamo che il rapporto $\frac{T_B}{T_A} = \frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}$ è consistente con l'invio di un segnale tra riferimenti che viaggiano con velocità relativa pari a u_{AB}.

Problema R.2

La relazione tra i quadrimpulsi delle particelle coinvolte è $P = p_1 + p_2 + p_3$, per cui possiamo scrivere $P - p_1 = p_2 + p_3$ e di conseguenza, prendendo il modulo quadro di questa relazione:

$$P^2 + p_1^2 - 2\,P\,p_1 = p_2^2 + p_3^2 + 2\,p_2 p_3.$$

Ma notiamo che $P\,p_1$ può essere calcolato nel riferimento del centro di massa ottenendo $P\,p_1 = M\,\varepsilon_1$, mentre $p_2 p_3$ può essere valutato nel riferimento di una delle due particelle ottenendo $p_2 p_3 = m_2 m_3 \gamma(v_{23})$, dove v_{23} è la loro velocità relativa. Risulta quindi

$$M^2 + m_1^2 - 2\,M\,\varepsilon_1 = m_2^2 + m_3^2 - 2\,m_2 m_3 \gamma(v_{23}),$$

da cui anche subito

$$\varepsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 - 2\,m_2 m_3 \gamma(v_{23})}{2\,M}.$$

La velocità v_1 si ottiene infine dalla relazione

$$v_1 = \frac{p_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 - m_1^2}}{\varepsilon_1}.$$

Problema A.1

La Lagrangiana del sistema, per un'opportuna scelta di coordinate generalizzate, prende la forma

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} K\,x_1^2 - \frac{1}{2} K\,(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} K\,(x_2 - x_3)^2 - \frac{1}{2} K\,x_3^2.$$

Le equazioni del moto risultanti per le (piccole) oscillazioni sono quindi:

$$m\,\ddot{x}_1 = -2\,K\,x_1 + K\,x_2,$$
$$m\,\ddot{x}_2 = -2\,K\,x_2 + K\,x_1 + K\,x_3,$$
$$m\,\ddot{x}_3 = -2\,K\,x_3 + K\,x_2.$$

L'equazione per le frequenze proprie ω_k si scrive in modo semplice indicando con ω_0 la quantità $\sqrt{\frac{K}{m}}$. Risulta allora per l'annullarsi del determinante della matrice $\omega^2 T_{ij} - V_{ij}$ la condizione

$$(\omega^2 - 2\,\omega_0^2)^3 - 2(\omega^2 - 2\,\omega_0^2)(\omega_0^2)^2 = 0,$$

che si riduce a

$$(\omega^2 - 2\,\omega_0^2)[(\omega^2 - 2\,\omega_0^2)^2 - 2(\omega_0^2)^2],$$

facilmente risolta per le frequenze proprie nella forma

$$\omega_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0, \qquad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0, \qquad \omega_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0.$$

Per confronto con la formula generale notiamo che le tre frequenze possono essere scritte come $\omega_k = 2\,\omega_0 \cos \frac{k}{8}\pi$.

Problema A.2

Calcoliamo le parentesi fondamentali:

$$\{Q,\, P\}_{qp} = \frac{\alpha\beta}{(1+p^2q^2)^2}\Big((1+2\,p^2q^2)+p^4q^4\Big) = \alpha\beta.$$

La condizione affinché la trasformazione sia canonica è quindi semplicemente $\alpha\beta = 1$. Per la ricerca della funzione generatrice notiamo che vale ad esempio

$$P^2 + P^2p^2q^2 = \alpha^2p^2,$$

da cui si ricava

$$p = \frac{P}{\sqrt{\alpha^2 - P^2q^2}}.$$

Introducendo la funzione generatrice

$$F_2(q,P) = \arccos\frac{P\,q}{\alpha}$$

si verifica facilmente che

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P}{\sqrt{\alpha^2 - P^2q^2}} = p,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{q}{\sqrt{\alpha^2 - P^2q^2}} = Q.$$