FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Primo appello - Sessione autunnale
Venerdì 14 Settembre 2007 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

1) La legge di trasformazione della legge oraria del moto uniforme $x_A = x_{A0} + u_A t$ si ricava in generale notando che (posto $c = 1$)

$$x'_A = \gamma(x_A - Vt), \qquad t'_A = \gamma(t - Vx_A),$$

da cui sostituendo

$$x'_A = \gamma(x_{A0} + u_A t - Vt), \qquad t'_A = \gamma(t - u_A V t - V x_{A)}),$$

che implica

$$t = \frac{t'_A + \gamma V x_{A0}}{\gamma(1 - u_A V)}, \qquad x'_A = u'_A t' + \frac{x_{A0}}{\gamma(1 - u_A V)},$$

dove come ci si aspettava $u'_A = \frac{u_A - V}{1 - u_A V}$.

La condizione che deve essere soddisfatta è quindi $x'_1 - x'_O = -(x'_2 - x'_O)$, dove vale $x'_O = \gamma x_{O0}$ in quanto deve risultare $u'_O = 0$.

Esplicitando la condizione suddetta si ottengono le equazioni

$$\frac{u_1 - V}{1 - u_1 V} = \frac{V - u_2}{1 - u_2 V},$$

$$\frac{x_{10}}{\gamma(1 - u_1 V)} + \frac{x_{20}}{\gamma(1 - u_2 V)} = 2\gamma x_{O0}.$$

Dalla prima equazione si ricava

$$V = \frac{\gamma(u_1)\, u_1 + \gamma(u_2)\, u_2}{\gamma(u_1) + \gamma(u_2)},$$

risultato che si poteva ricavare piú semplicementenotando che la velocità del riferimento del centro di massa di due particelle è data da $V = (p_1 + p_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, e se le particelle hanno ugual massa si ottiene proprio il risultato cercato.

La seconda equazione puó essere trasformata notando che vale

$$1 - u_1 V = \frac{1 + \gamma(u_1)\gamma(u_2)(1 - u_1 u_2)}{\gamma(u_1)(\gamma(u_1) + \gamma(u_2))}, \qquad 1 - u_2 V = \frac{1 + \gamma(u_1)\gamma(u_2)(1 - u_1 u_2)}{\gamma(u_2)(\gamma(u_1) + \gamma(u_2))},$$

e vale anche

$$\gamma^2 = \frac{(\gamma(u_1) + \gamma(u_2))^2}{2 + 2\gamma(u_1)\gamma(u_2)(1 - u_1 u_2)}.$$

Si ricava quindi per sostituzione diretta

$$x_{O0} = \frac{\gamma(u_1)\, x_{10} + \gamma(u_2)\, x_{20}}{\gamma(u_1) + \gamma(u_2)},$$

e vale la relazione (formula del centro di massa relativistico)

$$x_O(t) = \frac{\gamma(u_1)\, x_1(t) + \gamma(u_2)\, x_2(t)}{\gamma(u_1) + \gamma(u_2)}.$$

2) Notiamo che quando è soddisfatta la condizione $x_2(T) = x_1(T)$ risulta automaticamente soddisfatta anche la condizione $x_O(T) = x_1(T)$.

Per determinare T e $x_O(T)$ basta quindi risolvere l'equazione $x_{10} + u_1 T = x_{20} + u_2 T$, da cui si ricava

$$T = \frac{x_{10} - x_{20}}{u_2 - u_1}, \qquad x_O(T) = \frac{u_2 x_{10} - u_1 x_{20}}{u_2 - u_1}.$$

Il problema di partenza poteva essere risolto quindi piú semplicemente imponendo la condizione di coincidenza e determinando in tal modo x_{O0}.

Problema R.2

1) Poiché le distribuzioni sono uniformi ed è soddisfatto il vincolo dettato dalla conservazione dell'energia il decadimento è a due corpi.

2) Vale quindi, introducendo le variabili del centro di massa (e posto $c = 1$)

$$\varepsilon_{1m} = \gamma(\varepsilon_{1c} - p_c), \qquad \varepsilon_{2m} = \gamma(\varepsilon_{2c} - p_c),$$

$$\varepsilon_{1M} = \gamma(\varepsilon_{1c} + p_c), \qquad \varepsilon_{2M} = \gamma(\varepsilon_{2c} + p_c),$$

da cui subito si ricava

$$\varepsilon_{1c} = \frac{\varepsilon_{1m} + \varepsilon_{1M}}{2\gamma}, \qquad \varepsilon_{2c} = \frac{\varepsilon_{2m} + \varepsilon_{2M}}{2\gamma},$$

e inoltre

$$p_c = \frac{\varepsilon_{1M} - \varepsilon_{1m}}{2\gamma} = \frac{\varepsilon_{2M} - \varepsilon_{2m}}{2\gamma},$$

che ùna relazione consistente con il vincolo sperimentale.

Notando poi che vale $\varepsilon_{1c} + \varepsilon_{2c} = M$ si ricava facilmente

$$\gamma \frac{\varepsilon_{1m} + \varepsilon 2M}{M}$$

e da qui è immediato ricavare la velocità del fascio.

3) Dai risultati precedenti, noto γ, si ottiene facilmente

$$m_1^2 = \varepsilon_{1c}^2 - p_c^2 = \frac{\varepsilon_{1M}\varepsilon_{1m}}{\gamma^2}, \qquad m_2^2 = \varepsilon_{2c}^2 - p_c^2 = \frac{\varepsilon_{2M}\varepsilon_{2m}}{\gamma^2}.$$

Problema A.1

1) Il vincolo che lega le tre coordinate cartesiane del punto materiale è dato da

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2+z^2}=2a,$$

da cui si ricava

$$2a^2-c^2-x^2-y^2-z^2=\sqrt{(c^2+x^2+y^2+z^2)^2-4c^2x^2}$$

e quadrando nuovamente si ottiene

$$a^4=a^2c^2+a^2(x^2+y^2+z^2)-c^2x^2,$$

da cui, posto $a^2-c^2=b^2$, risulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

che è l'equazione di un ellissoide di rotazione con asse di simmetria lungo l'asse x.

Per la costruzione della Lagrangiana conviene usare come coordinate generalizzate x e y, eliminando la coordinata verticale z mediante la relazione

$$z=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

da cui si ricava facilmente anche l'espressione di $\dot{z}$. Si noti che il segno è stato scelto per avere un'espressione valida nella regione di interesse fisico $z<0$.

La Lagrangiana (valida per $z<0$) vale quindi

$$L=\frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\frac{b^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\big(\frac{x\dot{x}}{a^2}+\frac{y\dot{y}}{b^2}\big)^2\Big]+mgb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

2) La posizione di equilibrio è banalmente $x=y=0$, e lo sviluppo al secondo ordine della Lagrangiana è molto semplice in quanto il termine corrispondente a $\dot{z}^2$ è trascurabile. Risulta quindi

$$L\approx\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}mgb(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}).$$

Si vede subito che x e y corrispondono ai modi normali e le frequenze proprie sono semplicemente

$$\omega_x=\sqrt{\frac{gb}{a^2}},\qquad\qquad \omega_y=\sqrt{\frac{g}{b}}.$$