FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Primo appello - Sessione autunnale
Venerdì 12 Settembre 2008 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Indicando con A e B gli eventi di ricezione dei segnali emessi dai due estremi della sbarra, dalla cinematica classica del riferimento delle sorgenti permette di ricavare le loro coordinate temporale e spaziale:

$$A = \Big(\frac{c\,D}{c+v}, \frac{c\,D}{c+v}\Big);$$
$$B = \Big(\frac{c\,(D-L)}{c+v}, \frac{c\,D + v\,L}{c+v}\Big).$$

Nel riferimento delle sorgenti pertanto il tempo trascorso tra la ricezione dei due segnali è

$$t_A - t_B = \frac{L}{c+v},$$

mentre la distanza spaziale tra le posizioni occupate dall'osservatore risulta pari a

$$x_B - x_A = \frac{v\,L}{c+v},$$

un risultato consistente col fatto che l'osservatore viaggia a velocità v.

2) Una trasformazione di Lorentz ci permette di calcolare le coordinate spaziotemporali degli eventi di ricevimento nel riferimento del ricevitore:

$$A' = \Big(\gamma\,D, \gamma\,D\Big);$$
$$B' = \Big(\gamma\,D + \gamma(v-c)L, \gamma\,D\Big).$$

È ora facile calcolare:

$$t'_A - t'_B = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

3) L'intervallo relativistico nel riferimento delle sorgenti è dato da:

$$s^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 = \frac{c-v}{c+v}L^2.$$

e notiamo subito che

$$c(t'_A - t'_B) = s.$$

Problema R.2

1) Scegliendo unità di misura tali che $c = 1$ si trova immediatamente, dalla formula per l'energia di soglia nel riferimento del laboratorio, che nel caso indicato l'energia che occorre fornire vale:

$$E^l_{th} - m = 2\,m(c-1)\Big[1 + 1 + \frac{2\,m(c-1)}{2\,m}\Big] = 2\,m(c^2-1),$$

mentre nel riferimento del centro di massa l'energia che occorre fornire è semplicemente la differenza di massa tra i prodotti finali e le particelle iniziali:

$$2(E^{cm}_{th} - m) = 2\,m(c-1).$$

Di conseguenza il rapporto tra le energie fornite vale semplicemente:

$$\frac{E^l_{th} - m}{2(E^{cm}_{th} - m)} = c + 1.$$

Problema A.1

1) Poiché all'equilibrio, grazie alla relazione esistente tra le lunghezze di riposo delle molle, tutte le molle sono nella loro configurazione di equilibrio, la Lagrangiana espressa in termini degli scostamenti delle masse dalle posizioni d'eqilibrio è semplicemente:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{\eta}_3^2 - \frac{1}{2}K_{12}(\eta_1-\eta_2)^2 - \frac{1}{2}K_{13}(\eta_1-\eta_3)^2 - \frac{1}{2}K_{23}(\eta_2-\eta_3)^2.$$

2) L'equazione per le frequenze proprie si ottiene dalla condizione di annullamento del determinante della matrice M_{ij} che sulla diagonale vale $(m_i\omega^2 - K_{ia} - K_{ib})$, con a e b diversi da i, e fuori dalla diagonale vale K_{ij}.

Si noti che questa matrice ha determinante nullo per $\omega = 0$ in quanto le colonne non sono linearmente indipendenti (la loro somma fa zero), e pertanto esiste un modo zero, legato all'invarianza del sistema per traslazioni.

Piŭ generale si tratta di risolvere l'equazione

$$(\omega^2)^2 - \Big[\frac{K_{13}+K_{23}}{m_3} + \frac{K_{12}+K_{23}}{m_2} + \frac{K_{13}+K_{12}}{m_1}\Big]\omega^2$$
$$+(K_{12}K_{13} + K_{23}K_{13} + K_{12}K_{23})\Big(\frac{1}{m_1m_2} + \frac{1}{m_1m_3} + \frac{1}{m_3m_2}\Big) = 0.$$

Nel caso particolare indicato l'equazione si riduce a

$$\Big((\omega^2)^2 - 6\frac{K}{m}\omega^2 + 9\frac{K^2}{m^2}\Big) = \Big(\omega^2 - 3\frac{K}{m}\Big)^2 = 0,$$

e pertanto la soluzione per le due frequenze proprie non banali è degenere e vale

$$\omega = \sqrt{3\frac{K}{m}}.$$