FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2008/2009
Primo appello - Sessione autunnale
Venerdì 18 Settembre 2009 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Notiamo che, dalla relazione tra rapidità e velocità, posto $u/c=\beta$, si ricava

$$\frac{1+\beta}{1-\beta}=e^{2\theta}=(\omega\tau)^{\frac{2}{3}},$$

da cui risolvendo si ottiene facilmente

$$\beta=\frac{(\omega\tau)^{\frac{1}{3}}-(\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(\omega\tau)^{\frac{1}{3}}+(\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}},$$

e sostituendo si ricava anche

$$\gamma(u)=\frac{1}{2}\big[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}}+(\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\big].$$

Ricorrendo alla definizione di quadrivelocità si ottengono quindi le equazioni differenziali:

$$\frac{dx}{d\tau}=c\beta\gamma=\frac{c}{2}\big[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}}-(\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\big],$$
$$\frac{dt}{d\tau}=\gamma=\frac{1}{2}\big[(\omega\tau)^{\frac{1}{3}}+(\omega\tau)^{-\frac{1}{3}}\big].$$

Queste equazioni si integrano immediatamente, e il risultato è

$$x(\tau)=\frac{c}{2\omega}\big[\frac{3}{4}(\omega\tau)^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{2}(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}\big],$$

$$t(\tau)=\frac{1}{2\omega}\big[\frac{3}{4}(\omega\tau)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}\big].$$

Questa è la forma parametrica della soluzione che incorpora già le condizioni a contorno assegnate.

La seconda equazione può essere risolta algebricamente per ricavare $(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}$ in funzione di t, e il risultato è

$$(\omega\tau)^{\frac{2}{3}}=\sqrt{1+\frac{8}{3}\omega t}-1.$$

Sostituendo si ricava quindi la legge oraria:

$$x(t)=c\,t+\frac{3\,c}{2\omega}\big[1-\sqrt{1+\frac{8}{3}\omega t}\big].$$

Problema R.2

L'equazione del moto relativistica $f = \frac{dp}{dt}$ prende in questo caso la forma

$$\frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{d}{dt}\big[m_0 u \gamma(u)\big],$$

da cui sostituendo la soluzione proposta si trova:

$$\gamma(u(x)) = \sqrt{1+x}, \qquad \gamma(u(x))u(x) = c\sqrt{x}$$

e si verifica che

$$\frac{d}{dt}[c\sqrt{x}] = \frac{c}{2\sqrt{x}}u(x) = \frac{c^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{f}{m_0}.$$

Posto $x = \sinh^2\theta$ si ottiene facilmente:

$$\gamma = \cosh\theta, \qquad \gamma u = c\sinh\theta. \qquad u = c\tanh\theta,$$

coerentemente con la definizione di rapidità, e vale

$$\frac{dx}{dt} \equiv \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{2\sinh\theta\cosh\theta}{2\cosh^2\theta}c = c\tanh\theta = u,$$

come si doveva dimostrare.

Problema A.1

Possiamo utilizzare coordinate polari piane per il corpo m_1, notando che per il corpo m_2 vale $z = l - r$. La Lagrangiana prende quindi la forma

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\varphi}^2 - m_2 g r.$$

Le equazioni del moto che ne risultano sono

$$(m_1+m_2)\ddot{r} = m_1 r\dot{\varphi}^2 - m_2 g,$$

$$m_1 r^2\dot{\varphi} = M,$$

dove M è una costante del moto (momento angolare). Sostituendo risulta quindi:

$$(m_1+m_2)\ddot{r} = \frac{M^2}{m_1 r^3} - m_2 g.$$

La condizione di equilibrio dinamico fissa quindi la relazione tra M e il raggio r_0 del moto circolare:

$$M^2 = m_1 m_2 g r_0^3,$$

e possiamo quindi per comodità di notazione eliminare M^2 in favore di r_0.

L'equazione per le piccole oscillazioni si ottiene partendo dall'equazione del moto

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = m_2 g\Big(\frac{r_0^3}{r^3} - 1\Big),$$

sostituendo r con $r_0 + \eta$ e sviluppando al primo ordine in η, per cui vale

$$(m_1 + m_2)\ddot{\eta} = -\frac{3\,m_2 g}{r_0}\eta.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è quindi

$$\omega^2 = \frac{3\,m_2 g}{(m_1 + m_2) r_0}.$$

Notiamo invece che il moto circolare uniforme è caratterizzato da una frequenza ω_0 che si ricava dalla definizione $M = m_1 r_0^2 \omega_0$ e dalla relazione precedente:

$$\omega_0^2 = \frac{m_2 g}{m_1 r_0}.$$

Dal confronto diretto segue la relazione generale

$$\omega^2 = \frac{3m_1}{m_1 + m_2}\omega_0^2,$$

che come si vede dipende solo dal rapporto tra le masse ed è indipendente da r_0.