FISICA a III+aIV - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Terzo appello - Sessione autunnale
Lunedì 13 Settembre 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Si può indicare con x la coordinata corrispondente alla posizione della particella di massa m. La posizione z della massa M risulta allora determinata dal vincolo, e vale

$$z = \pm\sqrt{L^2 - x^2}, \qquad \dot{z} = \mp \frac{x\,\dot{x}}{\sqrt{L^2 - x^2}},$$

dove il simbolo $\pm$ corrisponde al fatto che M può trovarsi sia più in alto che più in basso dell'asse x. È quindi possibile scrivere la Lagrangiana del sistema nella forma

$$L_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\frac{x^2\dot{x}^2}{L^2 - x^2} - \frac{1}{2}K(x-l)^2 \mp Mg\sqrt{L^2 - x^2}.$$

2) La condizione di minimo dell'energia potenziale si ricava immediatamente dalla Lagrangiana esatta e ha la forma

$$K(x - l) = \pm\frac{Mgx}{\sqrt{L^2 - x^2}},$$

ovvero, introducendo la variabile R e la variabile ausiliaria $q = Q/L$,

$$q - \frac{l}{L} = \pm R\frac{q}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Nell'ipotesi che $l/L << 1$ e $R << 1$ la posizione di equilibrio stabile corrisponde a valori di q molto minori di 1, ed è facile allora risolvere l'equazione trovando

$$q_\pm \approx \frac{l}{L}\frac{1}{1 \mp R}.$$

Si noti che nel caso in cui $z < 0$ il risultato è coerente con l'ipotesi $q << 1$ anche per valori di R che non soddisfano la condizione $R << 1$.

Nel caso in cui $z > 0$ la condizione $R << 1$ è invece necessaria per la coerenza del risultato, ed esiste anche una posizione di equilibrio instabile con $q \approx 1$, che può essere trovata abbastanza facilmente passando alla variabile $\bar{q} = \sqrt{1 - q^2}$, che all'equilibrio soddisfa l'equazione

$$\bar{q} \mp R = \frac{l}{L}\frac{\bar{q}}{\sqrt{1 - \bar{q}^2}},$$

per cui nell'ipotesi che $z > 0$ e $\bar{q} << 1$ vale

$$\bar{q} \approx \frac{R}{1 - l/L}.$$

La verifica della stabilità si effettua calcolando la derivata seconda dell'energia potenziale, che vale

$$V'' = K\Big(1 \mp \frac{R}{(1-q^2)^{\frac{3}{2}}}\Big) = K\Big(1 \mp \frac{R}{\bar{q}^3}\Big).$$

Sostituendo le soluzioni $q_\pm << 1$ vale $V'' \approx K(1 \mp R) > 0$, mentre nel caso $z > 0$ sostituendo $\bar{q} << 1$ si trova $V'' \approx K(1 - \frac{1}{R^2}) < 0$.

3) Osserviamo che la condizione per cui le due posizioni di equilibrio, stabile e instabile, con $z > 0$ vanno a coincidere può essere determinata analiticamente e si verifica quando la derivata seconda dell'energia potenziale, che abbiamo calcolato esattamente, si annulla insieme alla prima (equazione del moto).

Deve quindi valere simultaneamente

$$q - \frac{l}{L} = R\frac{q}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad 1 = \frac{R}{(1-q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La soluzione si trova per sostituzione eliminando q e la condizione di coincidenza delle soluzioni può quindi essere espressa come vincolo nello spazio dei parametri:

$$(l/L)^{\frac{2}{3}} + R^{\frac{2}{3}} = 1.$$

e in quest'ipotesi la soluzione vale $q = (l/L)^{\frac{1}{3}}$, ovvero $\bar{q} = R^{\frac{1}{3}}$.

La regione in cui esistono tre posizioni di equilibrio è quella in cui vale

$$(l/L)^{\frac{2}{3}} + R^{\frac{2}{3}} < 1.$$

Problema R.1

Una superficie piana infinita in quiete nel riferimento primato è descritta dall'equazione $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r}' = K'$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è un versore e K' è una costante. La stessa superficie vista in un riferimento in cui essa si muove con velocità $\mathbf{v}$ deve soddisfare un'equazione della forma $\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = K$, dove K è un'altra costante.

Senza perdita di generalità, sfruttando le simmetrie, possiamo comunque assumere che i versori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'$ abbiano componenti soltanto sul piano (xy), che $\mathbf{v}$ sia diretta lungo la direzione x e che $K' = K = 0$.

Poiché ci interessa stabilire la relazione intercorrente tra i versori della superficie nei due sistemi di riferimento scriviamo quindi

$$n_x(x - vt) + n_y y = 0,$$

$$n'_x x' + n'_y y' = n'_x \gamma(x - vt) + n'_y y = 0$$

Il versore $\hat{\mathbf{n}}$, opportunamente normalizzato, vale quindi

$$n_x = \frac{\gamma n'_x}{\sqrt{\gamma^2 n'^2_x + n'^2_y}}, \qquad n_y = \frac{n'_y}{\sqrt{\gamma^2 n'^2_x + n'^2_y}}.$$

Ricordando che la legge di trasformazione delle forze nel passaggio da un riferimento qualunque a quello di quiete istantanea è descritta dalle equazioni

$$F_x = F'_x, \qquad F_y = \frac{F'_y}{\gamma},$$

e notando che nel nostro caso $\mathbf{F}'$ è parallela a $\hat{\mathbf{n}}'$, possiamo porre $\mathbf{F}' \equiv F_0\, \hat{\mathbf{n}}'$ e scrivere

$$F_x = F_0\, n'_x, \qquad F_y = F_0 \frac{n'_y}{\gamma}.$$

A questo punto possiamo calcolare subito la componente normale della forza nel riferimento in cui la superficie è in movimento:

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = F_x n_x + F_y n_y = \frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2 n'^2_x + n'^2_y}} \left(\gamma n'^2_x + \frac{1}{\gamma} n'^2_y\right) = F_0 \frac{\sqrt{\gamma^2 n'^2_x + n'^2_y}}{\gamma}.$$

Per determinare la legge di trasformazione dell'area della superficie, notiamo che deve essere la stessa che vale per la trasformazione della lunghezza di un segmento inclinato come la superficie stessa rispetto alla direzione del moto. Detta L tale lunghezza, notiamo che le sue proiezioni lungo gli assi x e y sono rispettivamente $L\, n_y$ e $L\, n_x$, ma per l'invarianza delle dimensioni trasverse deve valere $L\, n_x = L' n'_x$, e di conseguenza, detta S l'area della superficie, vale

$$S = \frac{L}{L'} S' = \frac{n'_x}{n_x} S' = \frac{\sqrt{\gamma^2 n'^2_x + n'^2_y}}{\gamma} S'.$$

A questo punto è immediato notare che la legge di trasformazione delle aree coincide con la legge trovata per la componente normale della forza, e si può ricavare la relazione

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{S} = \frac{F_0}{S'}.$$

Problema S.1

1) Il numero degli stati microscopici si ottiene dalla combinatoria e vale semplicemente

$$\Gamma(\{n_i\}) = \frac{N!}{\Pi_i n_i!},$$

dove n_i è il numero degli oggetti che hanno energia ϵ_i e deve valere $\sum_i n_i = N$.

Per il calcolo della funzione di partizione canonica si tratta quindi di valutare

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \frac{N!}{\Pi_i n_i!} exp(-\beta \sum_i n_i \epsilon_i) = N! \sum_{\{n_i\}} \Pi_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i n_i}}{n_i!}.$$

Effettuando la somma con il vincolo $\sum_i n_i = N$, per la formula del multinomio si ottiene immediatamente

$$Z_N = (\sum_i e^{-\beta \epsilon_i})^N.$$

Si riconosce subito in quest'espressione la funzione di partizione calcolata per un singolo oggetto ed elevata alla N-esima potenza.

2) Posto $z = e^{\beta \mu}$, per la funzione di partizione grancanonica nel caso di particelle distinguibili vale

$$Q = \sum_N z^N Z_N = \frac{1}{1 - z \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}},$$

mentre nel caso di particelle indistinguibili vale

$$Q = \sum_N \frac{1}{N!} z^N Z_N = exp(z \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}).$$

Problema S.2

1) Trattandosi di un sistema che si trova a temperatura costante possiamo utilizzare la distribuzione canonica nella variabile θ che rappresenta l'angolo formato dal momento magnetico con la direzione del campo magnetico.

L'energia del singolo dipolo vale quindi $\epsilon = -\mu H \cos\theta$, e di conseguenza il valor medio della componente del momento magnetico di un dipolo nella direzione di H si ottiene dall'espressione

$$\bar{\mu} = \frac{\int \mu \cos\theta \, e^{x \cos\theta} d\Omega}{\int e^{x \cos\theta} d\Omega},$$

dove abbiamo introdotto per comodità la variabile adimensionale $x \equiv \beta \mu H$. L'integrazione si effettua su tutto l'angolo solido e per simmetria vale $d\Omega = 2\pi \, d\cos\theta$.

Vale quindi, posto $z \equiv \cos\theta$

$$\bar{\mu} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \int_{-1}^{1} e^{xz} dz = \mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{2 \sinh x}{x} = \mu(\coth x - \frac{1}{x})$$

La magnetizzzazione totale si ottiene semplicemente moltiplicando il valor medio del momento magnetico per il numero dei dipoli presenti nel sistema, per cui

$$\bar{M} = N\bar{\mu} = N\mu(\coth \frac{\mu H}{kT} - \frac{kT}{\mu H}).$$

2) Notiamo che il valor medio dell'energia del sistema si riconduce al valore della magetizzazione grazie alla relazione $\bar{E} = N\bar{\epsilon} = -N\bar{\mu}H = -MH$.

Di conseguenza otteniamo per la capacità termica la relazione

$$c = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = -H \frac{\partial \bar{M}}{\partial T} = Nkx^2 \frac{\partial}{\partial x}(\coth x - \frac{1}{x}) = Nk(1 - \frac{x^2}{\sinh^2 x}).$$