Esame di Meccanica Quantistica (A-B)

16 Gennaio 2019 - Università di Pisa

(tempo a disposizione: 2 ore)

Problema 1

Il deutone è uno stato legato protone-neutrone. Il potenziale rspondabile è a corto raggio (esempio una buca). Assumiamo approssimativamente la stessa massa m per queste due particelle. La funzione d'onda per lo stato legato è approssimativamente descritta da

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,\frac{1}{r}e^{-\alpha r} \tag{1.1}$$

Gli stati del continuo possono essere approssimati nel seguito da onde piane.

1) Esprimere l'energia di legame attraverso il parametro α.

Il sistema viene investito da un'onda elettromagnetica di frequenza ω che si propaga lungo l'asse z. Il potenziale vettore sia

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\varepsilon}\, A_0\,\cos(\omega t - k_0 z)\,; \quad k_0 = \frac{\omega}{c}\,; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \text{polarizz.}$$

2) Scrivere l'ampiezza per effetto fotoelettrico sul sistema in approssimazione di dipolo.

3) Scrivere la distribuzione angolare dei protoni uscenti ed il rate del processo supponendo che la luce sia non polarizzata.

Problema 2

Una particella di massa m e carica e è libera di muoversi su una sfera di raggio a. L'Hamiltoniana può essere assunta nella forma

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\mathbf{L}^2 \equiv A\mathbf{L}^2 \tag{1.2}$$

1) Scrivere i primi due livelli energetici e la loro degenerazione.

Il sistema è sottoposto ad un campo magnetico esterno $\mathcal{B}$ diretto lungo l'asse z, cioè ad una energia potenziale esterna

$$V_B = -\mu B L_z$$

2) Mostrare che per $\mu B = 2A$ lo stato fondamentale è degenere, scrivere l'energia e gli autostati.

Al sistema, con $\mu B = 2A$, viene aggiunto un campo elettrico lungo x, cioè un'energia potenziale

$$V_E = -e\mathcal{E}x$$

3) Cosa succede al livello fondamentale? (Dire se si ha o no una disintegrazione del livello).

4) Discutere brevemente se l'Hamiltoniana $H_0 + V_B$ è invariante sotto parità ed alla luce di questo commentare il risultato ottenuto al punto 3).

5) La risposta al punto 3) cambierebbe se il campo elettrico fosse diretto lungo z?

Formule utili

$$\int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{4\pi}{q^2 + \mu^2}$$

Soluzione problema 1

1)

$$\sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu}$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta.
2) Solo il protone interagisce elettricamente con il campo e.m. . In gauge di Coulomb ($\boldsymbol{\varepsilon} \perp \hat{\mathbf{z}}$)

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1 - \frac{e}{c}\mathbf{A}) \;\Rightarrow\; H_I = -\frac{e}{mc}\mathbf{p}_1\mathbf{A} + \mathcal{O}(A^2)$$

In approssimazione di dipolo possiamo trascurare la dipendenza da z in $\mathbf{A}$ e quindi l'ampiezza di assorbimento (per poter effettuare effetto fotoelettrico) è

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\langle\mathbf{p}|\frac{e}{mc}\mathbf{p}|\psi_0\rangle = \hbar\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{k}\frac{A_0}{2}\frac{e}{mc}\int d^3\mathbf{x}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\psi_0(\mathbf{x}) \\ &= \frac{e\hbar}{2mc}A_0\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\frac{4\pi}{k^2+\alpha^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{k}\end{aligned}$$

Il fattore $1/2$ che accompagna A_0 è dovuto al fatto che solo la parte proporzionale a $\exp(-i\omega t)$ di $\mathbf{A}$ contribuisce alla transizione.
3) Il rate del processo è dato dalla formula di Fermi

$$\delta\mathcal{R} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\,|\mathcal{A}|^2\,d\Phi$$

Nel nostro caso

$$d\Phi = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{k^2dkd\Omega}{(2\pi)^3}\,; \quad E_f - E_i - \hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2\mu} - \hbar\omega + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu}$$

L'integrale su k elimina la δ, produce a denominatore $\hbar^2k/\mu$ e k viene fissato a

$$k = \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar} - \alpha^2}$$

quindi

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R} &= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{e^2\hbar^2}{4m^2c^2}A_0^2\frac{\alpha}{2\pi}16\pi^2\left(\frac{1}{k^2+\alpha^2}\right)^2\frac{\mu}{\hbar^2k}k^2|\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}|^2d\Omega\frac{1}{8\pi^3} \\ &= \frac{e^2}{mc^2}\frac{\alpha k}{\hbar}A_0^2\left(\frac{1}{k^2+\alpha^2}\right)^2\frac{1}{4\pi}|\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}|^2d\Omega\end{aligned}$$

Per luce non polarizzata, che si propaga lungo z:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \hat{z}_i\hat{z}_j)$$

quindi chiamando θ l'angolo rispeto al'asse z e usando

$$k_i k_j(\delta_{ij} - \hat{z}_i \hat{z}_j) = k^2 - k_z^2 = k^2 \sin^2\theta$$

e quindi si ha una distribuzione angolare proporzionale a $\sin^2\theta$:

$$\delta R = \frac{e^2}{mc^2} \frac{\alpha k}{\hbar} A_0^2 \left(\frac{1}{k^2 + \alpha^2} \right)^2 \frac{1}{2} \sin^2\theta \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Integrando si ottiene il rate totale

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\alpha k^3}{\hbar} A_0^2 \left(\frac{1}{k^2 + \alpha^2} \right)^2$$

Si noti che A_0^2 ha le dimensioni di una energia divisa per una lunghezza quindi $\mathcal{R}$ ha correttamente le dimensioni di $1/t$.