FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2003/2004

Lunedì 17 Novembre 2003 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

La relazione tra le velocità v_i delle due astronavi e i tempi t_i da esse rispettivamente impiegati a percorrere la distanza d è semplicemente

$$t_i = \frac{d}{v_i}.$$

I tempi propri sono legati alle velocità possedute dalle astronavi dalla relazione (vera per ciascun tratto percorso a velocità costante in modulo v)

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma(v)}.$$

Di conseguenza per la prima astronave vale

$$\tau_1 = \frac{d}{v_1\gamma(v_1)},$$

mentre per la seconda astronave, sommando sui due intervalli di tempo, si ottiene

$$\tau_2 = (t_1 - t_2) + \frac{t_2}{\gamma(v_2)} = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} + \frac{d}{v_2\gamma(v_2)}.$$

Volendo dimostrare che $\tau_1 > \tau_2$ per ogni $v_1 < v_2$, innanzitutto definiamo la funzione

$$f(v) \equiv \frac{c}{v} - \frac{c}{v\gamma(v)}$$

e notiamo che vale la relazione

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{d}{c}\Big(f(v_2) - f(v_1)\Big)$$

e pertanto la tesi è dimostrata se si prova che $f(v)$ è una funzione sempre crescente di v.

Conviene a questo punto passare alla variabile rapidità θ, notando che vale per definizione $v = c\tanh\theta$, e di conseguenza

$$f(v(\theta)) = \frac{\cosh\theta - 1}{\sinh\theta} = \tanh\frac{\theta}{2}.$$

Poichè $\tanh\frac{\theta}{2}$ è funzione sempre crescente di θ, e θ a sua volta è funzione sempre crescente della velocità, abbiamo ottenuto il risultato desiderato.

Problema 2

Notiamo innanzitutto che è sempre possibile, senza perdita di generalità, effettuare una traslazione dell'origine del sistema di coordinate spaziotemporali definendo le nuove variabili $y^\mu \equiv x^\mu - \bar{x}^\mu$ per cui
$$L^{\mu\nu} = y^\mu p^\nu - y^\nu p^\mu.$$

L'equazione per l'evoluzione temporale di $L^{\mu\nu}$ è

$$\frac{dL^{\mu\nu}}{d\tau} = u^\mu p^\nu + y^\mu f^\nu - u^\nu p^\mu - y^\nu f^\mu,$$

dove $u^\mu \equiv \frac{dy^\mu}{d\tau}$ è la quadrivelocità e $f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$ è la quadriforza, e poiché $p^\mu \equiv m_0 u^\mu$ risulta

$$\frac{dL^{\mu\nu}}{d\tau} = y^\mu f^\nu - y^\nu f^\mu \equiv \tau^{\mu\nu}.$$

Il più generale moto che conserva $L^{\mu\nu}$ deve quindi soddisfare la relazione $\tau^{\mu\nu} = 0$, ovvero $y^\mu f^\nu = y^\nu f^\mu$.

Ma a questo proposito notiamo che in generale per ogni coppia di quadrivettori A^μ e B^μ tali che $A^\mu B^\nu = A^\nu B^\mu$ deve necessariamente valere la relazione $B^\mu = \lambda A^\mu$, dove λ è uno scalare per trasformazioni di Lorentz. Pertanto nel nostro caso deve valere $f^\mu = \lambda y^\mu$, e poiché la quadriforza è proporzionale alla quadriaccelerazione possiamo scrivere la condizione
$$a^\mu \equiv \frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = \omega^2 y^\mu,$$

dove ω^2 è uno scalare di Lorentz.

Mostriamo ora che ω^2 è indipendente dal tempo proprio (e quindi è una costante del moto). Infatti la condizione $u^\mu u_\mu = c^2$ implica che $a^\mu u_\mu = 0$, e questa relazione unita alla condizione trovata sopra implica a sua volta, nell'ipotesi di soluzioni non banali ($\omega^2 \neq 0$), il vincolo
$$u^\mu y_\mu = 0,$$

che è subito risolto dalla relazione $y^\mu y_\mu = -r_0^2$, dove r_0^2 è una costante, determinata dalle condizioni iniziali.

Prendendo la derivata rispetto al tempo proprio della relazione $u^\mu y_\mu = 0$ si ottiene poi $u^\mu u_\mu + a^\mu y_\mu = 0$, da cui anche $a^\mu y_\mu = -c^2$, e sostituendo si ricava infine

$$\omega^2 y^\mu y_\mu = -\omega^2 r_0^2 = -c^2,$$

che implica che $\omega^2 = \frac{c^2}{r_0^2}$ è costante ed è a sua volta fissato a partire dalle condizioni iniziali.

Possiamo calcolare anche il modulo della quadriaccelerazione e riconoscere che per l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea a_0 vale

$$a_0 \equiv \sqrt{-a^\mu a_\mu} = \omega^2 \sqrt{-y^\mu y_\mu} = \frac{c^2}{r_0}.$$

Alternativamente si poteva dedurre il risultato studiando direttamente le condizioni per l'annullamento delle componenti di $\tau^{\mu\nu}$, e in particolare notando che, posto $\mathbf{F}$ il vettore forza, $y^\mu \equiv [ct, \mathbf{r}]$ e $\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{r}}$, la condizione per l'annullamento di τ^{0i} si scrive

$$c^2 t\,\mathbf{F} - \mathbf{r}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}) = 0,$$

mentre l'annullarsi di τ^{ij} richiede $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = 0$ ed è quindi una banale conseguenza della condizione precedente.

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{u}$ la condizione trovata si ottiene poi che, una volta escluso il caso banale $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = 0$ (che implicherebbe $\mathbf{F} = 0$), deve valere $c^2 t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = 0$, da cui subito integrando risulta $\mathbf{r}^2 = r_0^2 + c^2 t^2$, che è appunto la condizione $y^\mu y_\mu = -r_0^2$.

È evidente nel caso di moto unidimensionale che la soluzione trovata corrisponde al moto iperbolico (accelerazione costante nel riferimento di quiete istantanea). È anche possibile dimostrare che la soluzione generale dell'equazione $a^\mu = \omega^2 y^\mu$ si può scrivere in funzione del tempo proprio τ nella forma parametrica

$$ct = \frac{r_0}{\cos\theta} \sinh\omega(\tau - \tau_0),$$

$$\mathbf{r} = \frac{r_0}{2\cos\theta}\left[\hat{\mathbf{a}}\, e^{\omega(\tau-\tau_0)} + \hat{\mathbf{b}}\, e^{-\omega(\tau-\tau_0)}\right],$$

dove τ_0 è un parametro arbitrario e θ è l'angolo definito dalla relazione $\hat{\mathbf{a}}\cdot\hat{\mathbf{b}} = \cos 2\theta$, essendo $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ due versori costanti arbitrari.

La soluzione trovata si può anche riformulare sotto forma di legge oraria:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{m}} \sin\theta\, ct + \hat{\mathbf{n}}\sqrt{r_0^2 + (\cos\theta\, ct)^2},$$

dove $\hat{\mathbf{m}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{a}}-\hat{\mathbf{b}}}{2\sin\theta}$ e $\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{b}}}{2\cos\theta}$ sono due versori costanti arbitrari ma tra loro ortogonali.

È a questo punto facile verificare che la trasformazione di Lorentz caratterizzata dalla velocità $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{m}}\sin\theta\, c$ trasforma il moto sopra identificato in un moto iperbolico unidimensionale della forma

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{n}}\sqrt{r_0^2 + (ct')^2}.$$

Problema 3

Ogni fotone è caratterizzato dal proprio impulso $\mathbf{p}_i$, e quindi da tre variabili dinamiche, mentre l'energia è fissata dalla relazione $\varepsilon_i = |\mathbf{p}_i| c$. Occorre però tener conto delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, che sono in tutto quattro relazioni tra le variabili, e dell' invarianza per rotazioni, che permette di variare arbitrariamente tre angoli, per esempio al fine di orientare l'impulso del primo fotone lungo l'asse x e l'impulso del secondo fotone nel piano xy. Il numero dei gradi di libertà dinamici è quindi

$$3n - 4 - 3 = 3n - 7.$$

In particolare nel caso $n = 3$ i gradi di libertà dinamici sono due. Definiamo allora θ_i l'angolo formato dalle direzioni dei fotoni j e k (dove $j, k \neq i$) nel riferimento del centro di massa, nel quale la particella che decade è in quiete. Per l'annullarsi dell'impulso totale consegue immediatamente che in questo caso il decadimento avviene in un piano, e vale pertanto la relazione

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi.$$

Si possono quindi scegliere come variabili dinamiche indipendenti due qualunque tra gli angoli θ_i.

Per quanto detto in precedenza possiamo parametrizzare i quadrimpulsi nella forma

$$p_1 = \frac{h\nu_1}{c}[1, 1, 0, 0], \qquad p_2 = \frac{h\nu_2}{c}[1, \sin\theta_3, \cos\theta_3, 0], \qquad p_3 = \frac{h\nu_3}{c}[1, -\sin\theta_2, \cos\theta_2, 0],$$

e imporre la conservazione del quadrimpulso totale, notando che esso vale $P = [Mc, 0, 0, 0]$.

Ne conseguono quindi le relazioni

$$\nu_1 + \nu_2 \cos\theta_3 + \nu_3 \cos\theta_2 = 0, \qquad \nu_2 \sin\theta_3 + \nu_3 \sin\theta_2 = 0$$

e la conservazione dell'energia

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \frac{Mc^2}{h}.$$

Notiamo che dalle relazioni di conservazione dell'impulso discende immediatamente la proprietà, valida per qualunque coppia di valori i, j,

$$\frac{\nu_i}{\sin\theta_i} = \frac{\nu_j}{\sin\theta_j},$$

e sostituendo queste relazioni nella legge di conservazione dell'energia si ottiene facilmente per qualunque valore di i la relazione

$$\frac{\nu_i}{\sin\theta_i}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3) = \frac{Mc^2}{h}.$$

la formula risolutiva è pertanto

$$\nu_i = \frac{Mc^2}{h} \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3},$$

dove si intende che ciascuno dei tre angoli può essere eliminato in favore degli altri due mediante la relazione $\sin\theta_i = -\sin(\theta_j + \theta_k)$.