FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2004/2005
Venerdì 12 Novembre 2004 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

i) Possiamo scrivere le componenti della legge di conservazione di energia e impulso in termini delle variabili θ_i, indicando con θ_c la rapidità di M:

$$m\,\cosh\theta_1 + m\,\cosh\theta_2 = M\,\cosh\theta_c,$$

$$m\,\sinh\theta_1 + m\,\sinh\theta_2 = M\,\sinh\theta_c.$$

Dal rapporto delle due equazioni risulta

$$\tanh\theta_c = \frac{\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2}{\cosh\theta_1 + \cosh\theta_2} = \frac{2\sinh\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cosh\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{2\cosh\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cosh\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} = \tanh\frac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

da cui immediatamente si ottiene la relazione

$$\theta_c = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}.$$

ii) Sostituendo il risultato ottenuto nelle equazioni precedenti, oppure quadrando e sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ricava la relazione

$$M = 2\,m\,\cosh\frac{\theta_1-\theta_2}{2}.$$

iii) Nel cambiamento di sistema di riferimento le rapidità si trasformano additivamente, per cui passando al riferimento del centro di massa si ottiene

$$\theta_{1c} = \theta_1 - \theta_c = \frac{\theta_1-\theta_2}{2}, \qquad \theta_{2c} = \theta_2 - \theta_c = \frac{\theta_2-\theta_1}{2} = -\theta_{1c},$$

ovvero anche

$$\theta_{1c} + \theta_{2c} = 0, \qquad \frac{\theta_{1c}-\theta_{2c}}{2} = \frac{\theta_1-\theta_2}{2},$$

ed è confermata la relazione tra M ed m.

Problema 2

È possibile integrare l'equazione del moto una volta sfruttando il teorema dell'energia, e notando che dalle definizioni, posta E l'energia della particella, consegue

$$\frac{dE}{dt} \equiv m\,c^2\frac{d\gamma(u)}{dt} = F\,u = \frac{F_0}{\gamma(u)},$$

da cui, posto $K = \frac{2F_0}{m\,c^2}$, risulta

$$\gamma(u)\frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{1}{2}K.$$

Quest'equazione si integra banalmente: tenuto conto della condizione iniziale $\gamma(0) = 1$ si ottiene

$$\gamma^2(u) = 1 + Kt,$$

da cui risolvendo per la velocità si ricava

$$u = c\sqrt{\frac{Kt}{1+Kt}}.$$

La relazione con il tempo proprio si ottiene dalla definizione

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{1+Kt'}} = \frac{2}{K}\left[\sqrt{1+Kt} - 1\right],$$

da cui segue anche

$$Kt = \left(1 + \frac{1}{2}K\tau\right)^2 - 1,$$

per cui risulta

$$Kt - K\tau = \frac{1}{4}(K\tau)^2 > 0.$$

Problema 3

Notiamo innanzitutto che se le due particelle formano angoli uguali opposti rispetto alla direzione iniziale del moto, poiché le componenti dell'impulso ortogonali a tale direzione devono sempre essere uguali e opposte ne consegue che anche i moduli degli impulsi finali p' devono essere uguali. Ma le particelle hanno la stessa massa, e di conseguenza anche le loro energie finali E' dovranno essere uguali.

Posto per comodità $c = 1$ possiamo quindi scrivere le leggi di conservazione di energia e impulso (longitudinale) nella semplice forma

$$E + m = 2\,E', \qquad\qquad \sqrt{E^2 - m^2} = 2\,p'\cos\theta.$$

Ma deve anche valere la relazione $E'^2 - m^2 = p'^2$, che utilizzando i risultati precedenti e moltiplicando per $4\cos^2\theta$ porta all'equazione

$$[(E+m)^2 - 4m^2]\cos^2\theta = E^2 - m^2.$$

Semplificando e risolvendo si ottiene quindi

$$\cos^2\theta = \frac{E+m}{E+3\,m}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di p' si ottiene in conclusione

$$E' = \frac{1}{2}(E+m), \qquad\qquad p' = \frac{1}{2}\sqrt{(E-m)(E+3\,m)}.$$