FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2005/2006

Venerdì 4 Novembre 2005 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

1) La relazione tra tempo proprio (infinitesimo) e intervallo (infinitesimo) è in generale esprimibile nella forma $ds = c\,d\tau$. Nel caso specifico, poichè ci interessano soltanto i casi di quiete e moto circolare uniforme intorno al centro, scegliendo opportunamente le coordinate otterremo

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{r_M}{r} - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}},$$

dove $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ è la velocità angolare (costante) della rotazione.

Nel caso di particelle in quiete a una distanza assegnata r_a si può facilmente integrare la relazione precedente ottenendo

$$\Delta\tau_a = \Delta t\,\sqrt{1 - \frac{r_M}{r_a}}.$$

2) Poichè la fase è invariante per cambiamento di sistema di riferimento, la relazione che intercorre tra le frequenze misurate da due orologi fermi è semplicemente

$$\nu_1\,\Delta\tau_1 = \nu_2\,\Delta\tau_2.$$

3) Lo sviluppo al primo ordine nelle potenze di $1/c^2$ della relazione

$$\nu_a\Delta\tau_a = \nu_a\,\sqrt{1 - \frac{r_M}{r_a}}\Delta t = costante$$

si traduce nella relazione

$$\nu_a\,(1 - \frac{r_M}{2\,r_a}) \approx costante.$$

Moltiplicando per la costante di Planck h e ricordando che $\varepsilon = h\nu$ è l'energia del fotone si ottiene quindi

$$\varepsilon_a - \frac{GM}{r_a}\frac{\varepsilon_a}{c^2} \approx costante.$$

Ma dalla relazione di equivalenza tra massa (relativistica) ed energia consegue che $\frac{\varepsilon_a}{c^2}$ è la "massa inerziale" del fotone, e pertanto la relazione ottenuta esprime la conservazione dell'energia totale (cinetica più gravitazionale) del fotone mentre attraversa un campo di gravitazione.

4) Tornando alla relazione derivata inizialmente, e ponendosi a una distanza fissata dal centro r_0, si vede che l'intervallo di tempo $\Delta\tau$ misurato su un orologio in rotazione con velocità $u = \omega r_0$ è legato all'intervallo $\Delta\tau_0$ misurato su un orologio fermo dalla relazione

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_M}{r_0} - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_M}{r_0}}}\Delta\tau_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \frac{r_M}{r_0}}\frac{u^2}{c^2}}\Delta\tau_0.$$

La predizione della relatività ristretta nel caso di un moto relativo a un riferimento inerziale è invece semplicemente

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\Delta\tau_0.$$

Le due predizioni sono compatibili quando $r_M << r_0$.

Problema 2

Introduciamo i vettori d'onda finali $\mathbf{k}_1'$ e $\mathbf{k}_2'$ e notiamo che, posto in generale $k \equiv |\mathbf{k}| = \nu/c$, valgono le leggi di conservazione

$$E \equiv k_1 + k_2 = k_1' + k_2',$$

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_2'.$$

Prendendo il modulo quadro dei due termini della seconda equazione otteniamo

$$k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\cos\theta = k_1'^2 + k_2'^2 + 2k_1'k_2'\cos\theta',$$

e sottraendo dal quadrato della prima equazione ricaviamo la relazione invariante:

$$M^2 \equiv E^2 - \mathbf{P}^2 = 4\,k_1'k_2'\sin^2\frac{\theta'}{2} = 4\,k_1k_2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Risolvendo il sistema

$$k_1' + k_2' = E,$$

$$k_1'k_2' = \frac{M^2}{4\,\sin^2\frac{\theta'}{2}}$$

è immediato ricavare k_1' e k_2' in funzione delle costanti E e M e del parametro θ':

$$k_i' = \frac{E}{2} \pm \sqrt{(\frac{E}{2})^2 - (\frac{M}{2\,\sin\frac{\theta'}{2}})^2}.$$

2) Le frequenze massima e minima si possono ricavare applicando le formule di trasformazione di Lorentz alle espressioni della frequenza dei fotoni prodotti calcolate nel riferimento del centro di massa del sistema, nel quale vale

$$|\mathbf{k}_c'| = |\mathbf{k}_c| = \frac{M}{2},$$

notando che tale riferimento si muove con velocità $c\,\mathbf{P}/E$ rispetto al laboratorio (per cui il fattore γ vale E/M), e scegliendo come angolo di produzione $\cos\theta_c = \pm 1$.

Il risultato per le frequenze massima e minima è quindi

$$\nu' = c\,(\frac{M}{2})(\frac{E}{M})(1 \pm \frac{|\mathbf{P}|}{E}) = \frac{c}{2}(E \pm |\mathbf{P}|).$$

Alternativamente si poteva notare che le espressioni di k'_i ricavate in precedenza sono estremizzate dalla scelta $\sin\frac{\theta'}{2} = 1$ (che implica $\cos\theta' = -1$), da cui sostituendo si ricava il risultato precedente. Tale risultato può infine essere visto anche come soluzione del sistema (conseguente all'analisi precedente)

$$k'_1 + k'_2 = E,$$

$$k'_1 - k'_2 = \pm|\mathbf{P}|.$$

3) Per quanto detto al punto precedente, la direzione in cui si trovano la massima e la minima energia è quella del centro di massa del sistema, individuata dal vettore $\mathbf{P}$.

4) Come in tutti i processi in cui lo stato finale contiene solo due corpi, la distribuzione dei prodotti della collisione nel riferimento "del laboratorio" sarà uniforme in energia, con uguale probabilità per tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo calcolati in precedenza.