FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2006/2007
Lunedì 6 Novembre 2006 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'energia iniziale della particella accelerata è $m_1 c^2$, quella finale prima dell'urto, indicata con ε_1, si ricava dal teorema delle forze vive: $\varepsilon_1 - m_1 c^2 = F\,L$.

Poiché vale anche $\varepsilon_1 = m_1 \gamma(u) c^2$, dove u è la velocità finale della particella, si ottiene:

$$\gamma(u) - 1 = \frac{F\,L}{m_1 c^2} \equiv K,$$

dove K è una costante adimensionale dipendente dai parametri dell'acceleratore e della particella.

Risolvendo per la velocità finale si ottiene quindi:

$$u = \frac{\sqrt{(1+K)^2 - 1}}{1+K}\, c.$$

2) Notiamo che nel caso di una forza costante che agisce nella direzione del moto vale $F = m_1 \gamma^3 a = m_1 a_0$, dove a è l'accelerazione della particella e a_0 è l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea della particella stessa, che in questo caso è pertanto una costante, legata a K dalla relazione $a_0 L = K\,c^2$.

Dalla relazione $\gamma^3(u) du = a_0 dt$ si ottiene facilmente:

$$u(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}, \qquad \gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}.$$

Uguagliando le due espressioni che si possono ottenere per γ nell'istante T che precede immediatamente l'urto si ottiene

$$\left(1 + \frac{a_0 L}{c^2}\right)^2 = 1 + \frac{a_0^2 T^2}{c^2},$$

e di conseguenza immediatamente

$$T = \frac{c}{a_0} \sqrt{(1 + \frac{a_0 L}{c^2})^2 - 1}.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere anche dalla relazione $dt = \frac{dx}{u(x)}$ oppure dalla relazione tra impulso e quantità di moto, che per forze costanti vale $u\,\gamma(u) = a_0 T$.

Per il tempo proprio si procede analogamente mediante integrazione diretta:

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} = \frac{c}{a_0} \cosh^{-1}(1 + \frac{a_0 L}{c^2}).$$

3) Data la formula per l'energia di soglia

$$\varepsilon_1^{(th)} - m_1 c^2 = \Delta M \Big[1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2\, m_2}\Big],$$

basta porre $\varepsilon_1^{(th)} - m_1 c^2 = F^{(th)} L$ per ottenere

$$F^{(th)} = \frac{\Delta M}{L} \Big[1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2\, m_2}\Big].$$

4) La distribuzione in energia è uniforme, in quanto coincide con quella che si troverebbe in un decadimento a due corpi in cui la massa che decade valesse come la massa invariante del sistema, che a sua volta vale

$$M\, c^2 = \sqrt{(\varepsilon_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2},$$

da cui

$$M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2\, K\, m_1 m_2}.$$

Problema 2

1) La legge dinamica del moto circolare uniforme relativistico è

$$F = m\, \gamma(u) a = m \gamma(u) \frac{u^2}{r} = q\, u\, B,$$

da cui subito si ottiene

$$r(u) = \frac{m}{q\, B} \gamma(u)\, u.$$

Posto per comodità $\frac{q\,B}{m} \equiv \omega_0$ vale quindi

$$r(u) = \frac{\gamma(u)\, u}{\omega_0}, \qquad u(r) = \frac{\omega_0 r}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 r^2}{c^2}}}.$$

2) Il periodo delle orbite si ricava immediatamente dalla relazione $T = \frac{2\pi r}{u}$, da cui

$$T(u) = 2\pi \frac{\gamma(u)}{\omega_0}, \qquad T(r) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 r^2}{c^2}}.$$

3) Il tempo proprio di ciascuna particella si ricava dalla relazione $\tau = \frac{T}{\gamma(u)}$, da cui subito

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

indipendente da u e da r.

4) Il numero medio delle orbite percorse è dato dalla vita media (propria) delle particelle divisa per il periodo proprio, e risulta quindi

$$N = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{\omega_0 \tau_0}{2\,\pi},$$

anch'esso indipendente da u e da r.