FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2007/2008
Lunedì 5 Novembre 2007 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

a) La composizione di due velocità uguali in modulo e opposte in verso determina la relazione

$$v = \frac{2\,u}{1+\frac{u^2}{c^2}}.$$

Per determinare $\frac{u}{c}$ occorre quindi risolvere l'equazione $\frac{v}{c}\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 2\frac{u}{c} + \frac{v}{c} = 0$, da cui subito si ottiene

$$\frac{u}{c} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{c}}.$$

b) Dalle ipotesi segue immediatamente che, secondo gli orologi del riferimento in cui la prima astronave è in quiete, fissato a $t = 0$ l'istante dell'osservazione, la partenza da Terra della prima astronave è avvenuta al tempo $T_1 = -\frac{d}{u}$, mentre l'istante della partenza da Terra della seconda astronave si ricava tenendo conto che essa si muove con velocità v rispetto alla prima, e pertanto in questo riferimento essa si allontana da Terra con velocità(apparente) $v - u$, per cui la partenza è avvenuta al tempo $T_2 = -\frac{d}{v-u}$.

Risulta pertanto, sempre nel riferimento della prima astronave, che l'intervallo di tempo tra le due partenze vale $T_1 - T_2 = \frac{d}{v-u} - \frac{d}{u}$.

Utilizzando i risultati precedenti si ricava quindi nel riferimento della prima astronave

$$\Delta T^{(1)} = \frac{2\,d\,u}{c^2}\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

Tenendo conto dell'effetto relativistico di rallentamento degli orologi in moto, è immediato ricavare nel riferimento terrestre la relazione

$$\Delta T^{(T)} = \frac{2\,d\,u}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Si noti che nel limite non relativistico, come prevedibile, $\Delta T^{(T)} \to 0$.

Problema 2

a) Posto $c = 1$ per comodità, poichè nella configurazione completamente simmetrica i valori delle energie, e di conseguenza anche i moduli degli impulsi, sono tra loro uguali, è immediato ricavare per tali quantità i valori

$$\varepsilon_c = \frac{M}{4}, \qquad\qquad p_c = \sqrt{\left(\frac{M}{4}\right)^2 - m^2}.$$

b) Conviene scegliere le coordinate del riferimento del centro di massa in modo tale che le direzioni degli impulsi formino angoli di 45° con gli assi cartesiani. In questo modo si possono rappresentare in modo compatto i quadrivettori quadrimpulso dei quattro prodotti di decadimento con l'espressione

$$(\varepsilon_c, \pm\frac{p_c}{\sqrt{2}}, \pm\frac{p_c}{\sqrt{2}}, 0)$$

dove i due segni $\pm$ sono scelti in modo indipendente.

Il cambiamento di sistema di riferimento che ci fa passare al riferimento del centro di massa di una coppia adiacente di prodotti di decadimento è una qualunque trasformazione di Lorentz, diretta lungo uno dei due assi cartesiani, che avvenga con velocità

$$v = \frac{p_c}{\sqrt{2}\varepsilon_c}.$$

Per simmetria, le energie e i moduli degli impulsi risultanti saranno a due a due uguali e indipendenti dalla scelta della coppia di prodotti di decadimento.

Notiamo che (posta v lungo l'asse delle x) vale, per le quantità trasformate

$$\varepsilon' = \gamma(v)\big(\varepsilon_c \mp v\,\frac{p_c}{\sqrt{2}}\big),$$

$$p'_x = \gamma(v)\big(\pm\frac{p_c}{\sqrt{2}} - v\varepsilon_c\big),$$

con scelte di $\pm$ in questo caso non indipendenti, mentre

$$p'_y = \pm\frac{p_c}{\sqrt{2}},$$

Sostituendo il valore di v e semplificando si ottengono, a seconda della scelta del segno nelle prime due formule, due tipi di quadrimpulsi. Nel primo caso si ottiene

$$\Big(\sqrt{\varepsilon_c^2 - \frac{1}{2}p_c^2}, 0, \pm\frac{p_c}{\sqrt{2}}, 0\Big),$$

chiaramente corrispondente al quadrimpulso delle due particelle il cui centro di massa è fermo nel nuovo riferimento.

Nel secondo caso si ottiene invece

$$\Big(\frac{\varepsilon_c^2 + \frac{1}{2}p_c^2}{\sqrt{\varepsilon_c^2 - \frac{1}{2}p_c^2}}, \frac{\sqrt{2}\varepsilon_c p_c}{\sqrt{\varepsilon_c^2 - \frac{1}{2}p_c^2}}, \pm\frac{p_c}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$