FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2008/2009
Lunedì 10 Novembre 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema

1) L'equazione del moto relativistico unidimensionale è in generale $F = m_0\,\gamma^3\,a$, dove a è l'accelerazione. Pertanto nel caso specifico, ricordando che vale $E = m_0\,\gamma\,c^2$, l'equazione del moto si riduce a

$$m_0\,\gamma\,g = m_0\,\gamma^3\,a,$$

da cui subito

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^2} = g\,\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big).$$

Integrando l'equazione e imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ si ricava quindi:

$$\frac{v(t)}{c} = \tanh\frac{g\,t}{c} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt},$$

$$\gamma(t) = \cosh\frac{g\,t}{c}.$$

Un'ulteriore integrazione, con la condizione iniziale $x(0) = 0$, permette di ricavare la legge oraria:

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\ln(\cosh\frac{g\,t}{c}).$$

2) Ricordando che

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{1}{\cosh\frac{g\,t}{c}}$$

si ricava facilmente, con l condizione iniziale $\tau(0) = 0$, la relazione

$$\tau = \frac{c}{g}\arccos\Big(\frac{1}{\cosh\frac{g\,t}{c}}\Big),$$

da cui seguono anche le relazioni

$$\cosh\frac{g\,t}{c}\,\cos\frac{g\,\tau}{c} = 1,$$

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\cos\frac{g\,\tau}{c}},$$

$$\frac{v(\tau)}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sin\frac{g\,\tau}{c}.$$

3) Sostituendo la relazione tra t e τ ottenuta in precedenza nell'espressione di $x(t)$ si ricava

$$x(\tau) = -\frac{c^2}{g}\ln(\cos\frac{g\,\tau}{c}).$$

Ricordando poi che le componenti della quadrivelocità sono $(\gamma\, c, \gamma\, v)$ e utilizzando i risultati precedenti si ricava facilmente

$$U^\mu(\tau) = (\frac{c}{\cos\frac{g\,\tau}{c}}, c\ \tan\frac{g\,\tau}{c}).$$

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere anche derivando esplicitamente srispetto a τ le espressioni di $t(\tau)$ e $x(\tau)$ ricavate in precedenza.

Le espressioni delle componenti della quadrivelocità in funzione di t si potevano invece ottenere, oltre che per sostituzione diretta, anche notando che in questo problema la risposta alla prima domanda implica che per la rapidità vale $\theta = \frac{g\,t}{c}$.

4) Ricordando che vale in generale nel caso unidimensionale $a_0 = \gamma^3\, a$,in questo caso particolare si ricava immediatamente dall'equazione del moto

$$a_0 = \gamma\, g = \frac{g}{\cos\frac{g\,\tau}{c}}.$$

5) Per la relazione che intercorre tra t e τ il limite $t \to \infty$ corrisponde al limite $\cos\frac{g\,\tau}{c} \to 0$, e questo a sua volta corrisponde al limite

$$\tau \to \frac{\pi}{2}\frac{c}{g}.$$

Quindi a un tempo infinito nel riferimento inerziale corrisponde un intervallo di tempo proprio finito per la particella.