FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2009/2010
Venerdì 18 Dicembre 2009 - ore 15

SOLUZIONI

Problema

1) Notiamo che vale

$$z = \frac{1}{2}a\,(x^2 + y^2) + b\,x\,y,$$

$$\dot{z} = (a\,x + b\,y)\dot{x} + (a\,y + b\,x)\dot{y}.$$

L'espressione della Lagrangiana si ottiene dunque sostituendo le espressioni di z e $\dot{z}$ come funzioni di x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ nella formula

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m\,g\,z.$$

La condizione di equilibrio per il sistema descritto da questa Lagrangiana è banalmente $x = y = 0$, come si può facilmente verificare scrivendo esplicitamente le equazioni del moto o anche soltanto osservando che non sono presenti nella Lagrangiana termini lineari nelle coordinate generalizzate.

2) Nella Lagrangiana che abbiamo ottenuto il termine che dipende da $\dot{z}$ è quartico nelle potenze di x e y, ed è pertanto irrilevante ai fini del problema delle piccole oscillazioni, che si riduce allo studio della Lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\,g\,a(x^2 + y^2) - m\,g\,b\,x\,y.$$

L'equazione per le frequenze proprie si ricava facilmente dall'espressione di L' e prende la forma

$$(\omega^2 - g\,a)^2 - g^2 b^2 = 0.$$

Le due frequenze proprie sono quindi $\omega_\pm^2 = g\,(a \pm b)$ e ad esse corrispondono gli autovettori $(1,\,1)$ e $(1,\,-1)$.

3) La matrice degli autovettori, opportunamente normalizzata, corrisponde a una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ sul piano $(x,\,y)$. La matrice è pertanto banalmente invertibile, e si possono quindi ricavare immediatamente e facilmente i modi normali che, con una normalizzazione arbitraria ma conveniente, prendono la forma

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm y).$$

La Lagrangiana riscritta in termini dei modi normali si ottiene effettuando la sostituzione

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ + Q_-), \qquad\qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ - Q_-)$$

in L', e ottenendo così

$$L'' = \frac{1}{2}m\big[\dot{Q}_+^2 - \omega_+^2 Q_+^2\big] + \frac{1}{2}m\big[\dot{Q}_-^2 - \omega_-^2 Q_-^2\big],$$

espressione in cui è evidente il disaccoppiamento tra i modi normali stessi.

4) Le Hamiltoniane corrispondenti alle Lagrangiane precedentemente ottenute sono rispettivamente

$$H' = \frac{p_x^2}{2\,m} + \frac{p_y^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m\,g\,a(x^2 + y^2) + m\,g\,b\,x\,y,$$

$$H'' = \frac{P_+^2}{2\,m} + \frac{P_-^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m[\omega_+^2 Q_+^2 + \omega_-^2 Q_-^2].$$

La trasformazione canonica che connette le due Hamiltoniane è una trasformazione puntuale, ed è immediato ricavare che prende la forma

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm y),$$

$$P_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_+ \pm P_-).$$

La verifica della canonicità di questa trasformazione può essere effettuata calcolando esplicitamente le parentesi di Poisson fondamentali per le nuove coordiante e i nuovi momenti e verificando che sono invarianti, oppure costruendo e applicando una funzione generatrice del tipo $F_2 = \sum_i Q_i(x,y)P_i$, che è quella tipica delle trasformazioni puntuali.