FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2003/2004

Giovedì 18 Dicembre 2003 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

Dalla definizione di momento coniugato alla variabile q segue immediatamente la relazione

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\sqrt{q^2}\,\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}$$

da cui risolvendo per $\dot{q}$ si ottiene

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

È a questo punto facile ricavare l'Hamiltoniana dalle relazioni

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q^2}{\sqrt{p^2+q^2}} = \sqrt{p^2+q^2}.$$

Le corrispondenti equazioni canoniche sono

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} = \dot{q},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} = -\dot{p}.$$

Ma osserviamo che, poichè l'Hamiltoniana non ha dipendenza esplicita dal tempo, essa è conservata e pertanto possiamo porre $p^2+q^2 = E^2$, dove E è una costante. Di conseguenza le equazioni si riducono alla forma

$$\dot{q} = \frac{p}{E}, \qquad \dot{p} = -\frac{q}{E}$$

e sono facilmente risolte, per ogni valore fissato di E, dalle relazioni

$$q = E\sin(\frac{t}{E} + \varphi),$$

$$p = E\cos(\frac{t}{E} + \varphi),$$

dove φ è una costante d'integrazione arbitraria.

Nel caso più generale basta osservare che risulta

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\sqrt{f^2(q)}\,\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}},$$

da cui subito

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + f^2(q)}}$$

e di conseguenza $H = \sqrt{p^2 + f^2(q)}$.

Le equazioni canoniche prendono quindi la forma

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + f^2(q)}} = \dot{q},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{f(q) f'(q)}{\sqrt{p^2 + f^2(q)}} = -\dot{p}.$$

Sfruttando la conservazione di H esse si riducono poi alle relazioni

$$\dot{q} = \frac{p}{E}, \qquad\qquad \dot{p} = -\frac{f(q) f'(q)}{E}.$$

In generale quindi, qualora si conosca la soluzione delle equazioni canoniche per l'Hamiltoniana $K = H^2 = p^2 + f(q)^2$, posto E^2 il valore costante di K sarà possibile risolvere le equazioni per H semplicemente effettuando nelle leggi orarie ottenute la sostituzione $t \to \frac{t}{2E}$.

Problema 2

Notiamo che, applicando le definizioni, vale per ogni coppia di variabili indipendenti p e q (non necessariamente canoniche)

$$\{p, f(q)\}_{Q,P} \equiv \frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial f(q)}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial f(q)}{\partial Q} = \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q}\right) = \{p, q\}_{Q,P}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Problema 3

Le equazioni di Hamilton associate all'Hamiltoniana proposta sono

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad\qquad \dot{p} = \frac{2\alpha}{q^3}.$$

Poichè l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo l'energia si conserva:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{q^2} = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{\alpha}{q_0^2}.$$

a) Notiamo che il prodotto pq soddisfa l'equazione

$$\frac{d(pq)}{dt} = p\dot{q} + q\dot{p} = \frac{p^2}{m} + \frac{2\alpha}{q^2} = 2\,E,$$

e pertanto la sua evoluzione temporale è rappresentata dalla relazione

$$2\,Et = pq - p_0 q_0.$$

Ricavando (ad esempio) p in funzione di q da questa relazione e sostituendo nella legge di conservazione dell'energia si ottengono facilmente le soluzioni delle equazioni del moto nella forma

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2mE}}\sqrt{2m\alpha + (2\,Et + p_0 q_0)^2}, \qquad p(t) = \frac{\sqrt{2mE}\,(2\,Et + p_0 q_0)}{\sqrt{2m\alpha + (2\,Et + p_0 q_0)^2}},$$

dove E è da intendersi come funzione di p_0 e q_0 secondo la relazione precedentemente derivata.

b) Utilizzando i risultati precedenti otteniamo:

$$\{pq, H\}_{q_0,p_0} = \{2\,H(p_0,q_0)t + p_0 q_0, H(p_0,q_0)\}_{q_0,p_0} = \{p_0 q_0, H(p_0,q_0)\}_{q_0,p_0},$$

da cui sostituendo l'espressione esplicita di H si ottiene infine

$$\{pq, H\}_{q_0,p_0} = 2\,H.$$

c) Il risultato precedente implica anche che

$$\{pq, \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{q^2}\}_{q_0,p_0} = -\frac{p^2}{m}\{p,q\}_{q_0,p_0} + q\{p, \frac{\alpha}{q^2}\}_{q_0,p_0} = 2\,H.$$

Usando la relazione dimostrata nel Problema 2 otteniamo poi

$$-\frac{p^2}{m}\{p,q\}_{q_0,p_0} - \frac{2\alpha}{q^3}q\{p,q\}_{q_0,p_0} = 2\,H\{q,p\}_{q_0,p_0} = 2\,H$$

e pertanto ne consegue che

$$\{q,p\}_{q_0,p_0} = 1.$$

Ricordando la proprietà per cui una trasformazione è canonica se e solo se preserva le parentesi di Poisson possiamo interpretare il risultato ottenuto nel senso che l'evoluzione temporale del sistema dall'istante iniziale a un istante arbitrario t, ovvero la trasformazione $q_0, p_0 \to q, p$, dove $q = q(t, q_0, p_0)$ e $p = p(t, q_0, p_0)$, è una trasformazione canonica.