FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2004/2005
Venerdì 17 Dicembre 2004 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

Poiché la somma delle lunghezze di riposo delle molle è uguale alla lunghezza della circonferenza, ogni configurazione in cui le masse distano fra loro come le lunghezze a riposo delle molle è una configurazione di equilibrio. Possiamo scegliere come coordinate generalizzate gli angoli misurati lungo gli archi di circonferenza e scrivere la Lagrangiana del sistema nella forma

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta_1^2+\dot\theta_3^2)+\frac{1}{2}MR^2\dot\theta_2^2-\frac{1}{2}KR^2\big[(\theta_3-\theta_2-\frac{l}{R})^2+(\theta_2-\theta_1-\frac{l}{R})^2+(2\pi+\theta_1-\theta_3-\frac{L}{R})^2\big].$$

Passiamo ora a un sistema di coordinate che misurino lo scostamento dalle posizioni di equilibrio, $\eta_i = \theta_i-\theta_{i0}$. Facendo questo notiamo che vale $R\theta_{10} = R\theta_{20}-l$ e $R\theta_{30} = R\theta_{20}+l$, per cui si ottiene la nuova forma della Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot\eta_1^2+\dot\eta_3^2)+\frac{1}{2}MR^2\dot\eta_2^2-\frac{1}{2}KR^2\big[(\eta_3-\eta_2)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\eta_1-\eta_3)^2\big].$$

Ai fini del calcolo delle frequenze proprie si noti che le matrici rilevanti assumono la seguente forma:

$$T_{ij} = m_iR^2\delta_{ij}, \qquad V_{ij} = KR^2(3\delta_{ij}-1).$$

In particolare V_{ij} è una matrice a determinante nullo, e pertanto una delle frequenze proprie sarà necessariamente uguale a zero, in corrispondenza con l'invarianza fisica del sistema per rotazioni globali intorno al centro della circonferenza.

Eliminando il fattore comune R^2 si trova che l'equazione per l'annullamento del determinante di $\omega^2T_{ij}-V_{ij}$ prende la forma

$$(m\omega^2-2K)^2(M\omega^2-2K)-2K^2(m\omega^2-2K)-k^2(M\omega^2-2K)+2K^3=0,$$

da cui semplificando

$$\big[m^2M(\omega^2)^2-2Km(m+2M)(\omega^2)+3K^2(M+2m)\big]\omega^2=0.$$

Quest'equazione puø' essere ulteriormente fattorizzata nella forma

$$\big[mM\omega^2-K(M+2m)\big]\big[m\omega^2-3K\big]\omega^2=0,$$

e pertanto le frequenze proprie sono

$$\omega_1^2=\frac{K}{m}+2\frac{K}{M}, \qquad \omega_2^2=3\frac{K}{m}, \qquad \omega_3^2=0.$$

Nel caso limite in cui $M=m$ il rapporto tra le due frequenze non nulle ω_1 e ω_2 vale esattamente 1. Più in generale tale rapporto non dipende da K e vale $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{m}{M}$.

Problema 2

Le equazioni canoniche corrispondenti all'Hamiltoniana data sono:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = Aq^2, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2Apq.$$

La prima equazione si integra banalmente e la soluzione con la condizione a contorno assegnata ha la forma

$$q(t) = \frac{q_0}{1 - Aq_0 t}.$$

Si può ora ostituire questo risultato nella seconda equazione, ottenendo

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{d}{dt}\ln p = -2A\frac{q_0}{1 - Aq_0 t} = 2\frac{d}{dt}\ln(1 - Aq_0 t).$$

Integrando banalmente, esponenziando il logaritmo ed imponendo la condizione a contorno si ottiene quindi

$$p(t) = p_0(1 - Aq_0 t)^2.$$

Sostituendo nell'Hamiltoniana si ricava subito

$$Ap(t)q^2(t) = Ap_0(1 - Aq_0 t)^2 \frac{q_0^2}{(1 - Aq_0 t)^2} = Ap_0 q_0^2,$$

e quindi l'Hamiltoniana è costante nel tempo, come si voleva verificare.

La Lagrangiana si ricava dalla relazione

$$L = p\dot{q} - H = p(Aq^2) - Apq^2 = 0,$$

un risultato singolare ma non inatteso, in quanto in questo problema non esiste alcuna relazione funzionale tra p e $\dot{q}$, come si vede dalle equazioni canoniche, e pertanto il formalismo lagrangiano non può funzionare.

Problema 3

Calcoliamo la parentesi di Poisson fondamentale per le nuove variabili:

$$\{Q, P\}_{q,p} = a\,b,$$

pertanto per la canonicità deve valere $a\,b = 1$.

La funzione generatrice $F_3(Q, p)$ si ricava esprimendo le trasformazioni in funzione di Q e p:

$$q = b^2 p\, Q^2, \qquad P = b^2 p^2 Q$$

e imponendo le equazioni

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q},$$

da cui a meno di costanti additive arbitrarie si ricava

$$F_3(Q, p) = -\frac{1}{2} b^2 p^2 Q^2.$$

Utilizzando il formalismo delle trasformazioni di Legendre e la relazione $Q = \frac{P}{b^2 p^2}$ otteniamo poi

$$F_4(p, P) = PQ(p, P) + F_3(Q(p, P), p) = \frac{1}{2}\frac{P^2}{b^2 p^2}.$$