FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2005/2006
Venerdì 16 Dicembre 2005 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

Scegliamo come coordinate generalizzate la posizione X del centro del carrello e la posizione x della massa m rispetto al centro del carrello. Otteniamo quindi la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}+\dot{x})^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}Kx^2.$$

I corrispondenti momenti coniugati sono allora:

$$P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (M+m)\dot{X} + m\dot{x},$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{X}+\dot{x}),$$

e la coordinata X è evidentemente ciclica, per cui $\dot{P} = 0$.

Ricaviamo allora

$$\dot{X} = \frac{P - m\dot{x}}{M+m},$$

dove P è costante, e deriviamo la funzione di Routh

$$R = P\dot{X} - L = \frac{(P-m\dot{x})^2}{2(M+m)} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Kx^2 = \frac{1}{(M+m)}\left(\frac{P^2}{2} - mP\dot{x} - \frac{Mm\dot{x}^2}{2}\right) + Kx^2.$$

Per ricavare le equazioni del moto di x possiamo trascurare i termini che sono derivate totali rispetto al tempo, ottenendo quindi la Lagrangiana effettiva

$$L' = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}\dot{x}^2 - Kx^2,$$

cui corrisponde l'energia conservata

$$E' = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}\dot{x}^2 + Kx^2.$$

Si tratta dela Lagrangiana e dell'energia di un oscillatore di massa $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ (massa ridotta) e costante elastica $2K$.

Posto quindi $\omega = \sqrt{\frac{2K}{\mu}}$ otteniamo soluzioni per x nella forma $x = x_0 \cos\omega t$, dove abbiamo già imposto la condizione iniziale $\dot{x}(0) = 0$.

Se poi osserviamo che nelle ipotesi del problema anche $\dot{X}(0) = 0$, e pertanto $P = 0$, si trovano subito le soluzioni per X nella forma $X = X_0 - \frac{m}{M+m}x_0 \cos\omega t$.

Notando che per le condizioni iniziali assegnate si può porre $X(0) = 0$ e $x_0 = \frac{L}{2}$ abbiamo in conclusione

$$x(t) = \frac{L}{2}\cos\omega t,$$

$$X(t) = \frac{L}{2}\frac{m}{M+m}(1 - \cos\omega t).$$

Problema 2

Le equazioni canoniche per l'Hamiltoniana K hanno la forma

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega Q},$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -m\omega^3 A^2 \sin \omega Q \cos \omega Q \Big[1 + \big(\frac{P}{m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega Q}\big)^2\Big].$$

Perché $Q = t - t_0$ sia soluzione delle equazioni canoniche occorre che $\dot{Q} = 1$, e ciò richiede necessariamente

$$P(t) = m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega(t - t_0).$$

Sostituendo nella seconda equazione canonica si trova la condizione

$$\dot{P} = -2m\omega^3 A^2 \sin \omega(t - t_0) \cos \omega(t - t_0) = -2m\omega^3 A^2 \sin \omega Q \cos \omega Q,$$

che è consistente con la precedente.

La condizione di invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali $\{q, p\}_{Q,P} = 1$ implica nel caso in esame

$$\omega A \cos \omega Q \frac{\partial p}{\partial P} = 1,$$

da cui subito si ricava

$$p = \frac{P}{\omega A \cos \omega Q}.$$

Sostituendo in K si ottiene quindi

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2,$$

che è l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico.

Tale Hamiltoniana ammette chiaramente soluzioni della forma

$$q(t) = A \sin \omega(t - t_0), \qquad p(t) = m\omega A \cos \omega(t - t_0),$$

che corrispondono appunto a

$$Q(t) = t - t_0, \qquad P(t) = m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega(t - t_0).$$