FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2006/2007
Mercoledì 20 Dicembre 2006 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

Scegliamo come coordinata generalizzata l'allungamento η della molla, per cui la posizione della massa m_0 in un riferimento inerziale si può esprimere con la formula $x = x_0(t) + l_0 + \eta$. Ne segue immediatamente che l'espressione della velocità è $\dot{x} = \dot{x}_0(t) + \dot{\eta}$ e quella dell'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0(t) + \dot{\eta})^2.$$

La Lagrangiana può quindi essere scritta nella forma

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{\eta}^2 + m_0 \dot{\eta}\, \dot{x}_0(t) - \frac{1}{2} K\, \eta^2,$$

dove abbiamo già trascurato un termine che non dipende da η e $\dot{\eta}$.

1) Notiamo ora che vale la relazione

$$m_0 \dot{\eta}\, \dot{x}_0(t) = \frac{d}{dt}(m_0 \eta\, \dot{x}_0) - m_0\, \eta\, \ddot{x}_0,$$

per cui, sfruttando il fatto che è sempre possibile aggiungere o togliere dalla Lagrangiana un termine che abbia la forma di una derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate e del tempo, possiamo descrivere il sistema in modo equivalente mediante la Lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2} m_0 \dot{\eta}^2 - m_0 \ddot{x}_0 \eta - \frac{1}{2} K\, \eta^2,$$

che come richiesto non dipende da $\dot{x}_0$ ma soltanto da $\ddot{x}_0$.

2) La corrispondente equazione del moto si ricava assai semplicemente ed è della forma

$$m_0 \ddot{\eta} = -K\, \eta - m_0 \ddot{x}_0.$$

3)Nel caso in cui $\ddot{x}_0 = a_0$ la soluzione dell'equazione del moto è

$$\eta(t) = -\frac{m_0 a_0}{K} + A\, \cos(\omega\, t + \varphi),$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_0}}$ e A e φ sono costanti arbitrarie fissate dalle condizioni iniziali del moto.

Nel caso di una molla disposta verticalmente in un campo di gravitazione uniforme e costante la Lagrangiana e la legge oraria sono le stesse trovate sopra a patto di identificare a_0 con l'accelerazione prodotta dal campo gravitazionale.

Problema 2

1) Le equazioni del moto per l'Hamiltoniana modificata hanno la forma

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H_0}{\partial p},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} + \varepsilon \sin \omega \, t.$$

L'effetto del termine aggiuntivo è quello di sottoporre il sistema iniziale all'effetto di una forza periodica di intensità ε e di frequenza ω.

2) Se imponiamo che la relazione $K(Q, P) = H_0(q, p)$ sia la conseguenza di una trasformazione canonica di H deve risultare necessariamente

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H = H_0(q, p) - H(q, p) = \varepsilon \, q \sin \omega t.$$

Quest'equazione si integra banalmente assumendo che la trasformazione sia prossima all'identità e scrivendo

$$F_2(q, P) = q \, P - \frac{\varepsilon q}{\omega} \cos \omega t.$$

Le risultanti leggi di trasformazione sono:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P - \frac{\varepsilon}{\omega} \cos \omega t,$$

da cui anche $P = p + \frac{\varepsilon}{\omega} \cos \omega t$, e

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q.$$

Di conseguenza vale la relazione

$$K(Q, P) = H_0(Q, P - \frac{\varepsilon q}{\omega} \cos \omega t).$$

3) Se dall'ultima espressione ottenuta ricaviamo le equazioni del moto otteniamo

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p} = \dot{q} = \dot{Q},$$

$$-\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} = \dot{p} - \varepsilon \sin \omega t = \dot{P},$$

come si voleva dimostrare.