FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2007/2008
Mercoledì 19 Dicembre 2007 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

1) Scegliamo come coordinate generalizzate le posizioni delle masse lungo le guide, misurate a partire dal punto comune e con verso positivo verso il basso. Con questa scelta la Lagrangiana ha la semplice forma:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{l}_1^2 + m_1 g\frac{l_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}m_2\dot{l}_2^2 + m_2 g\frac{l_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}K(l_1^2 + l_2^2).$$

Le equazioni per l'equilibrio statico sono quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}m_1 g - K\,l_1 = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}m_2 g - K\,l_2 = 0,$$

e sono banalmente risolte da:

$$l_1^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_1 g}{K}, \qquad l_2^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_2 g}{K}.$$

2) Per il calcolo delle piccole oscillazioni si può effettuare la sostituzione $\eta_i = l_i - l_i^o$ nella Lagrangiana, ottenendo

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\eta}_1^2 - \frac{1}{2}K\,\eta_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2}K\,\eta_2^2.$$

Si vede subito che i moti sono disaccoppiati, e le frequenze proprie sono rispettivamente

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_2}},$$

mentre i modi propri sono banalmente

$$Q_1 = \eta_1, \qquad Q_2 = \eta_2.$$

Problema 2

1) Nel primo caso si ha

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j P_j M_{ji} = \sum_j {}^t M_{ij} P_j,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \sum_j M_{ij} q_j,$$

per cui la forma esplicita della trasformazione è

$$Q_i = \sum_j M_{ij} q_j, \qquad\qquad P_i = \sum_j {}^t M^{-1}_{ij} p_j.$$

Nel secondo caso caso vale

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = \sum_j N_{ji} Q_j,$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = \sum_j p_j N_{ji} = \sum_j {}^t N_{ij} p_j,$$

per cui la forma esplicita della trasformazione è

$$Q_i = \sum_j N^{-1}_{ij} q_j, \qquad\qquad P_i = \sum_j {}^t N_{ij} p_j.$$

2) Dal confronto dei risultati segue immediatamente che le due trasformazioni sono identiche se $N = M^{-1}$. Il calcolo diretto della trasformazione di Legendre di F_2 si effettua utilizzando la relazione

$$F_3(p_i, Q_i) = F_2(q_i, P_i) - \sum P_i Q_i - \sum p_i q_i,$$

in cui si devono effettuare le opportune sostituzioni per ottenere la corretta dipendenza dalle variabili.

Utilizzando i irisultati precedenti si ottiene

$$F_3(p_i, Q_i) = \sum_{jklm} p_j M^{-1}_{jk} M_{kl} M^{-1}_{lm} Q_m - \sum_{jk} p_j M^{-1}_{jk} Q_k - \sum p_j M^{-1}_{jk} Q_k,$$

da cui

$$F_3(p_i, Q_i) = -\sum p_j M^{-1}_{jk} Q_k,$$

e se si vogliono rendere identiche le trasformazioni segue subito la relazione $N = M^{-1}$

3) Segue immediatamente dai risultati precedenti che se le trasformazioni per le coordinate e per i momenti coniugati devono avere la stessa forma, allora deve essere $M = {}^t M^{-1}$, che è proprio la condizione soddisfatta dalle matrici ortogonali che rappresentano le rotazioni.