FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2008/2009
Mercoledì 17 Dicembre 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema 1

Il luogo dei punti che sono accessibili rispettando il vincolo che si preservi la somma delle distanze da due punti fissati é una semiellisse della quale i punti fissi rappresentano i fuochi.

Scegliendo l'origine delle coordinate al centro dell'ellissi e indicando con x la coordinata orizzontale e con y quella verticale, la traiettoria puó essere parametrizzata mediante l'angolo θ, scrivendo

$$x = a \sin\theta, \qquad y = -b \cos\theta,$$

dove si é posto

$$a \equiv \frac{L}{2}, \qquad b \equiv \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - D^2}.$$

Con questa scelta di coordinata generalizzata la Lagrangiana esatta assume la forma

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + m\,g\,b\,\cos\theta.$$

L'approssimazione di piccole oscillazioni si ottiene sviluppando la Lagrangiana in potenze di θ e $\dot{\theta}$ intorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$, e ottenendo

$$L \approx \frac{1}{2}m\,a^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\,g\,b\,\theta^2.$$

É immediato ricavare la frequenza delle piccole oscillazioni dalla relazione

$$\omega^2 = \frac{g\,b}{a^2} = \frac{2\,g}{L}\sqrt{1 - \frac{D^2}{L^2}}.$$

Nel limite $D \to L$ si ricava $\omega = 0$, a indicare l'esistenza di una situazione di equilibrio indifferente, in quanto il filo risulta in questo caso perfettamente orizzontale, e la massa si puó muovere di moto rettilineo uniforme.

Nel limite $D \to 0$ si ottiene invece $\omega = \sqrt{\frac{2\,g}{L}}$, che é proprio la frequenza del pendolo di lunghezza $\frac{L}{2}$ descritto da tale limite.

Problema 2

Per la Lagrangiana data risulta

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\,\dot{q}, \qquad\qquad \dot{q} = \frac{p}{a(q)},$$

da cui é immediato ricavare

$$H(p,q) = p\,\dot{q} - L = \frac{p^2}{2\,a(q)}.$$

Le equazioni canoniche del moto sono

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{a(q)}, \qquad\qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{2\,a(q)^2}\frac{\partial a}{\partial q},$$

e inoltre

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Dai risultati precedenti, posto $f(p,q) \equiv p\,a(q)^{-\frac{1}{2}}$ e notando che

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{1}{2} p\,a(q)^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial a}{\partial q}, \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial p} = a(q)^{-\frac{1}{2}}$$

si ricava facilmente

$$\{f,\, H\} = 0,$$

che implica la conservazione di f, in quanto $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Lo stesso risultato si poteva ottenere in modo immediato notando semplicemente che $f = \sqrt{2\,H}$.