FISICA a III - Prova in itinere - A.A. 2009/2010
Venerdì 26 Marzo 2010 - ore 11

SOLUZIONI

Problema 1

Introduciamo innanzitutto le coordinate x (direzione del moto dell'astronave) e y (direzione in cui si trova l'astronave all'istante $t = 0$, e identifichiamo gli eventi rilevanti (nel riferimento terrestre:

A) Invio del segnale dall'origine $(x = 0, y = 0)$ all'istante $t = 0$, quando l'astronave si trova nel punto di coordinate $(x = 0, y = D)$.

B) Ricevimento del segnale iniziale da parte dell'astronave $(t = T,\ x = vT,\ y = D)$

C) Ricevimento del segnale di risposta $(t = 2T,\ x = 0,\ y = 0)$.

Notiamo immediatamente che è possibile rappresentare questi tre eventi nel riferimento in cui l'astronave è in quiete mediante una trasformazione di Lorentz:

$$A' = (0,\, 0,\, 0),$$

$$B' = (\gamma(T - \frac{v^2}{c^2}T),\, \gamma(vT - vT),\, D) = (\frac{T}{\gamma},\, 0,\, D),$$

$$C' = (2\gamma T,\, -2\gamma vT,\, 0).$$

1) La condizione per il ricevimento del segnale è data dall'uguaglianza del tempo impiegato dalla luce per percorrere il tratto tra Terra e astronave con il tempo di volo dell'astronave:

$$\sqrt{D^2 + v^2T^2} = cT,$$

da cui si ricava

$$T = \gamma\frac{D}{c}.$$

Notiamo che il risultato appare coerente con la descrizione dell'evento nel riferimento dell'astronave, nel quale il tratto percorso dal segnale è lungo D e vale, per la dilatazione dei tempi, $\frac{T}{\gamma} = \frac{D}{c}$.

2) Dal risultato precedente si ricava immediatamente

$$\tan\theta_i = \frac{D}{vT} = \frac{c}{\gamma v} = \frac{1}{\beta\gamma} = \tan\theta_f,$$

o anche $\cos\theta_i = \beta$, $\sin\theta_i = 1/\gamma$, mentre vale $\cos\theta_f = -\beta$, $\sin\theta_f = -1/\gamma$.

3) La formula dell'aberrazione relativistica implica

$$\tan\theta_i' = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i - \beta} = \infty,$$

coerente con l'ovvia relazione $\theta_i' = \frac{\pi}{2}$,

$$\tan\theta_f' = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta_f}{\cos\theta_f - \beta} = \frac{1}{2\beta\gamma^2}.$$

4) Calcolando direttamente l'angolo θ_f' a partire dalla posizione della Terra nel riferimento dell'astronave si ottiene

$$\tan\theta_f' = \frac{D}{2\gamma v T} = \frac{1}{2\beta\gamma^2},$$

come si voleva dimostrare.

Si noti che valgono anche le relazioni

$$\sin\theta_f' = -\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}, \qquad \cos\theta_f' = -\frac{2\beta}{1+\beta^2}.$$

Problema 2

1) Le equazioni canoniche implicano

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = c\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}},$$

da cui si ricava, risolvendo per $\mathbf{p}$ in funzione di $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m\,\gamma\,\mathbf{v},$$

e sostituendo in H si ottiene

$$E = m\,c^2\,\gamma + V(r).$$

Dalla trasformazione di Legendre inversa si ricava subito:

$$L = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - H = m\,\gamma\,\mathbf{v}^2 - m\,\gamma\,c^2 - V(r) = -m\,c^2\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - V(r).$$

3) Risulta immediatamente

$$\int L_0(bfr, bfv)dt = -m\,c^2\int\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}dt = -m\,c^2\int d\tau,$$

e l'integrale del tempo proprio è invariante di Lorentz per definizione.