Paolo Rossi

Meccanica Relativistica e Analitica

Esercizi

Indice Generale

Esercizi di Meccanica Relativistica

C.1 Trasformazioni di Lorentz

Esercizio C.1.1

A quale istante T di un orologio terrestre deve essere inviato un segnale e.m. diretto a un'astronave in moto con velocità costante v se si vuole che il segnale venga ricevuto al tempo T' dell'astronave, assumendo che gli orologi siano stati sincronizzati al tempo $t = t' = 0$ al momento della partenza dell'astronave (e considerando trascurabile il tempo dell'accelerazione)?

Esercizio C.1.2

Un'astronave è diretta verso la Terra con velocità costante v. Dall'astronave si vuole inviare a Terra un segnale (elettromagnetico) di preavviso che deve giungere con un anticipo T prefissato (in tempo terrestre) rispetto al momento dell'arrivo dell'astronave. Con quanto anticipo T' (tempo dell'astronave) rispetto al momento dell'atterraggio dovrà essere inviato il segnale?

Esercizio C.1.3

Determinare la legge di trasformazione relativistica dell'intervallo di tempo che intercorre tra l'emissione e la ricezione di un segnale elettromagnetico, misurato in sistemi di riferimento il cui moto relativo sia parallelo alla direzione di propagazione del segnale. Discutere il significato del risultato ottenuto confrontandolo con la formula dell'effetto Doppler longitudinale.

Esercizio C.1.4

Un segnale di tipo elettromagnetico viene inviato da un'estremità di una sbarra di lunghezza a riposo l_0 verso l'altra estremità, dove viene riflesso e ritorna all'estremità di partenza dopo un tempo complessivo T dall'invio.

Stabilire la relazione che intercorre tra il tempo T e la lunghezza l della sbarra, entrambi misurati nel riferimento in cui la sbarra si muove con velocità v.

Esercizio C.1.5

Un razzo di lunghezza a riposo l_0 si allontana dalla Terra con velocità costante. Un segnale radar inviato da Terra viene riflesso da specchi posti uno sulla coda e uno sulla testa del razzo. Il primo segnale riflesso ritorna alla stazione emittente dopo un tempo terrestre T (misurato dal momento dell'invio del segnale), mentre il secondo segnale riflesso perviene con un piccolo ma misurabile ritardo ΔT. Sulla base di queste informazioni determinare la distanza da Terra del razzo al momento della ricezione del segnale e la sua velocità di allontanamento.

Esercizio C.1.6

Un'astronave che si sta avvicinando alla Terra con una velocità non rilevabile invia messaggi comunicando il tempo (dell'astronave) che manca all'arrivo a partire dal momento di invio del messaggio stesso.

Nel primo messaggio il tempo mancante è T_1', nel secondo messaggio è T_2', e tra l'arrivo dei due messaggi trascorre sulla Terra un intervallo di tempo ΔT.

Qual è la velocità dell'astronave? Dopo quanto tempo (terrestre) dopo l'arrivo del secondo segnale giungerà l'astronave?

Esercizio C.1.7

Un'astronave si avvicina a Terra con velocità v_1, mentre una seconda si allontana da Terra nella direzione della prima con velocità v_2. Dalla seconda astronave vengono inviati alla prima due segnali, intervallati da un tempo ΔT_2. Al ricevimento i segnali vengono immediatamente rinviati verso Terra.

Calcolare l'intervallo ΔT_1 tra i tempi di ricevimento sulla prima astronave. Calcolare l'intervallo tra i tempi di ricevimento dei segnali rinviati, prima sulla seconda astronave e poi a Terra.

Esercizio C.1.8

Due binari paralleli conduttori sono connessi da un generatore. Su di essi viaggia a velocità u un carrello costituito da due assi conduttori posti a una distanza l uno dall'altro e connessi tra loro da materiali isolanti. Un tratto di binario di lunghezza d è rivestito da una guaina isolante.

Calcolare in funzione di u il valore minimo l_0 per la distanza tra gli assi del carrello tale per cui è possibile assicurare il mantenimento della chiusura del circuito mentre il carrello transita sul tratto isolato del binario.

Esercizio C.1.9

Date due sbarre di lunghezza rispettiva l_1 ed l_2, in moto nella stessa direzione con velocità relativa v, quale relazione deve intercorrere tra le loro lunghezze perché la prima sbarra appaia più lunga della seconda in tutti i sistemi di riferimento?

Discutere anche la condizione necessaria affinché la prima sbarra appaia sempre più breve della seconda e mostrare che il risultato soddisfa il principio di relatività.

Esercizio C.1.10

Una sbarra di lunghezza a riposo l_0 si muove a velocità costante u nella direzione y mantenendosi parallela all'asse x.

Passando a un riferimento in moto con velocità v nella direzione x, calcolare la lunghezza della sbarra in tale riferimento e l'angolo da essa formato con l'asse x.

Esercizio C.1.11

Due sbarre di lunghezza a riposo l_1 ed l_2 viaggiano nella stessa direzione a differenti velocità v_1 e v_2. Al momento del sorpasso esse appaiono della stessa lunghezza a un osservatore fermo. Supponendo nota v_1, calcolare v_2.

Esercizio C.1.12

Una sbarra di lunghezza l orientata nella direzione y si muove con velocità v diretta parallelamente all'asse x. All'istante $t = 0$ la sbarra si trova sovrapposta all'asse y.

Dimostrare che un osservatore posto nell'origine riceve simultaneamente, all'istante $t = 0$, segnali elettromagnetici provenienti da punti della sbarra che al momento di emissione del segnale risultano collocati lungo una stessa retta uscente dall'origine. Calcolare il valore dell'angolo θ formato da tale retta con l'asse x.

Esercizio C.1.13

Determinare, in funzione del tempo di osservazione, l'immagine (ottica) di una sbarra di lunghezza L che si muove con velocità v sull'asse x, assumendo che un osservatore situato nell'origine riceva dalla sbarra segnali elettromagnetici.

Esercizio C.1.14

Determinare la forma delle trasformazioni di Lorentz per le variabili di cono-luce $x_\pm \equiv x \pm ct$, nel caso di moto relativo diretto lungo l'asse delle x.

Esercizio C.1.15

Nel caso di moto rettilineo uniforme in una dimensione, se in un riferimento vale la legge oraria $x = x_0 + ut$, in un altro riferimento in moto rispetto al primo vale $x' = x'_0 + u't'$. A partire dalle leggi di trasformazione delle coordinate determinare in funzione di u e u' la relazione esistente tra x_0 e x'_0 e la velocità v del moto relativo dei due riferimenti.

Esercizio C.1.16

Dimostrare che la sequenza temporale di due eventi è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali se e solo se in un riferimento dato la separazione temporale è maggiore del tempo impiegato dalla luce a superare la distanza tra i punti in cui sono situati gli eventi

Esercizio C.1.17

Dimostrare che, se in un riferimento dato due eventi sono simultanei, in ogni altro riferimento la loro distanza è maggiore, mentre per due eventi che in un riferimento avvengono nello stesso sito, in ogni altro riferimento la separazione temporale è maggiore.

Esercizio C.1.18

Dimostrare che, data la separazione temporale Δt e spaziale $\Delta\mathbf{r}$ tra due eventi, la quantità $c^2\Delta t^2 - \Delta\mathbf{r}^2$ mantiene lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali.

Esercizio C.1.19

Dato un moto che avviene con velocità $\mathbf{u}$ nel riferimento O e con velocità $\mathbf{u}'$ nel riferimento O' che si muove con velocità relativa v rispetto a O, a partire dalla legge di trasformazione relativistica delle velocità dimostrare che vale la relazione:

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)(1 - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2})$$

Esercizio C.1.20

Determinare, sulla base della composizione relativistica delle velocità, l'espressione della velocità della luce lungo la direzione del moto in un mezzo che si trova in movimento con velocità v, essendo n l'indice di rifrazione del mezzo e di conseguenza $\frac{c}{n}$ la velocità della luce nel mezzo in quiete. Confrontare il risultato con la predizione non relativistica (effetto Fizeau-Fresnel).

Esercizio C.1.21

Dati due sistemi di riferimento O e O' in moto con velocità relativa v connessi da una trasformazione speciale di Lorentz, calcolare la velocità u relativa a O del piano sul quale istante per istante gli orologi situati nei due riferimenti continuano a segnare lo stesso tempo $t = t'$. Mostrare che $u < v$ e trovare la relazione tra le rapidità.

Un orologio in moto con velocità u giacente sul piano di cui sopra misura intervalli di tempo proprio rispetto al quale gli osservatori situati in O e in O' misureranno lo stesso intervallo di tempo relativo. Spiegare sulla base della dilatazione dei tempi come questo è possibile. Calcolare la velocità u' del moto del piano relativamente a O' e interpretare il risultato precedente sulla base del risultato per u' e del principio di relatività.

Esercizio C.1.22

Mostrare, per il caso di moti relativi collineari, che la legge di composizione relativistica delle velocità può essere derivata direttamente dalla condizione che le trasformazioni degli intervalli di tempo tra emissione e ricezione di segnali e.m. formino un gruppo moltiplicativo. Esprimere i coefficienti di tali trasformazioni in funzione della rapidità $\tanh\theta = \frac{v}{c}$.

Esercizio C.1.23

Calcolare la velocità finale di una particella che, essendo dotata inizialmente di una velocità u, rimbalza elasticamente dopo aver colliso contro una parete ortogonale al moto che viaggia nella direzione opposta con velocità v.

Esercizio C.1.24

Derivare formalmente sulla base della cinematica relativistica il fenomeno della precessione di Thomas, che consiste in un effetto di rotazione per un vettore che si sposta insieme a un sistema di riferimento rotante.

Esercizio C.1.25

Mostrare che l'effetto complessivo di due trasformazioni di Lorentz successive effettuate in direzioni tra loro ortogonali è equivalente a quello di una singola trasformazione di Lorentz seguita da una rotazione degli assi coordinati.

Calcolare i parametri della trasformazione di Lorentz e della rotazione in funzione dei parametri v_x e v_y delle trasformazioni assegnate.

C.2 Cinematica e ottica relativistica

Esercizio C.2.1

Mostrare, analizzando lo scambio di segnali periodici tra una sorgente terrestre e un rivelatore posto sulla Luna, che l'effetto Doppler trasversale è una conseguenza diretta del fenomeno della dilatazione dei tempi negli orologi in movimento. Analizzare anche la riflessione dei segnali dalla Luna alla Terra, mostrando la coerenza dei risultati.

Esercizio C.2.2

Determinare la precisione strumentale (percentuale) minima necessaria per un esperimento di verifica del paradosso dei gemelli basato su aeroplani in volo con velocità v, rispettivamente oraria e antioraria, intorno alla Terra.

Esercizio C.2.3

Quanti anni (approssimativamente) occorrono affinché un orologio lunare perda un secondo rispetto a un orologio terrestre? Quanti ne occorrono per avere lo stesso ritardo in un orologio terrestre rispetto a uno solare? Quanti per un orologio solare rispetto a uno galattico? (La distanza del Sole dal centro della Galassia è di circa 26.000 anni-luce, e il periodo di rotazione della Galassia è di circa 200 milioni di anni).

Esercizio C.2.4

Calcolare l'allargamento Doppler delle righe spettrali, ovvero la variazione percentuale in frequenza che si osserva nella radiazione emessa a seguito di transizioni atomiche che avvengono in gas posti alla temperatura assoluta T.

Esercizio C.2.5

Derivare la legge di trasformazione relativistica dell'accelerazione longitudinale.

Calcolare la norma del quadrivettore quadriaccelerazione, specializzare il risultato al caso di accelerazione parallela alla velocità e confrontare con il risultato precedente.

Esercizio C.2.6

Dato un punto materiale in moto in un riferimento inerziale con una legge oraria assegnata $x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + u\,t + r$, determinare la forma presa dalla legge oraria in un riferimento inerziale in moto con velocità v rispetto al precedente. Determinare poi il valore di v che corrisponde al riferimento di quiete istantanea del punto all'istante $t' = 0$ nel caso in cui $r = 0$.

Per un punto materiale in moto con la legge oraria inizialmente indicata, e con un valore di $r \neq 0$, determinare il valore della posizione, della velocità e dell'accelerazione istantanea, all'istante $t' = 0$, nel riferimento di quiete istantanea del punto per cui $r = 0$, al primo ordine nel parametro r.

Esercizio C.2.7

Discutere la variazione della distanza fra due razzi, misurata nel riferimento di quiete istantanea di uno di essi, al variare della loro velocità, se tale distanza rimane costante nel riferimento in cui i razzi appaiono soggetti a moto variabile con la stessa legge oraria assegnata $u(t)$. Indicare gli effetti fisici su un dinamometro (molla) che connette i due razzi.

Esercizio C.2.8

Dato un insieme di sistemi di riferimento sincronizzati all'origine, determinare, in un particolare sistema di riferimento O, il luogo geometrico degli eventi tali per cui esiste un altro riferimento O' in cui l'evento avviene all'istante $t' = 0$ e si trova a una distanza fissata L dall'origine.

Analogamente, determinare il luogo degli eventi che in un riferimento O' arbitrario avvengono nell'origine a un tempo fissato T.

Esercizio C.2.9

Determinare la trasformazione di Lorentz per le componenti V^0, $\mathbf{V}$ di un quadrivettore controvariante in una forma che ne renda manifeste le proprietà di covarianza per rotazioni spaziali.

Esercizio C.2.10

Mostrare l'invarianza di Lorentz dell'equazione di d'Alembert:

$$[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}]\phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Esercizio C.2.11

Mostrare che, data una densità di carica $\rho(\mathbf{x}, t)$ dotata di una velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, se la carica è invariante per trasformazioni di Lorentz allora le quantità $(\rho c, \rho \mathbf{v})$ si trasformano come le componenti di un quadrivettore j^μ.

Mostrare che la legge di conservazione della corrente può essere scritta in una forma che rende automaticamente evidente l'invarianza di Lorentz della legge stessa.

Esercizio C.2.12

Dimostrare che la velocità del cambiamento di volume di una porzione di fluido relativistico obbedisce alla relazione $\frac{d}{dt}\delta V = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial r^i}\delta V$, dove u^i sono le componenti cartesiane della velocità del fluido nel punto di coordinate r^i.

Dimostrare che di conseguenza, se $\delta A = \rho \delta V$ è una qualunque quantità scalare, la sua legge di evoluzione è $\frac{d}{dt}\delta A = \partial_\mu j^\mu \, \delta V$, dove j^μ è il quadrivettore $[\rho, \, \rho \mathbf{u}]$, e pertanto se si tratta di una quantità conservata deve valere $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Esercizio C.2.13

Considerare una distribuzione di materia nell'Universo (modello di Milne) caratterizzata dalla seguente espressione per la quadricorrente: $j^\mu = cKX^\mu(X \cdot X)^{-2}$, dove X^μ è il quadrivettore posizione, K una costante invariante di Lorentz con le dimensioni di una massa, e l'espressione vale nella regione in cui $X \cdot X \geq 0$.

Mostrare che a tale distribuzione corrisponde una legge di conservazione della massa $\partial_\mu j^\mu = 0$ consistente con la mancanza di interazioni della materia in oggetto.

Mostrare che la distribuzione è consistente con la legge di Hubble per la dipendenza della velocità dalla distanza: $\mathbf{u} = H\mathbf{r}$, pur di scegliere per $t = 0$ l'istante del Big Bang e di porre $H = t^{-1}$.

Discutere come apparirà la distribuzione in un sistema di riferimento inerziale solidale con uno qualunque degli elementi di materia in moto con la velocità definita dalle relazioni precedenti.

Esercizio C.2.14

Due osservatori giacciono su un piano che ruota con velocità angolare ω intorno a un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale. Le loro distanze dall'asse di rotazione sono rispettivamente r_1 e r_2. Dimostrare, sulla base dell'analisi dello scambio di segnali tra i due osservatori, che la relazione intercorrente tra la frequenza di un segnale emesso dal primo e quella osservata dal secondo è consistente con l'ipotesi che gli orologi degli osservatori ruotanti siano soggetti a un rallentamento determinato dal fattore $\gamma(\omega r)$.

Esercizio C.2.15

Dimostrare che le leggi di trasformazione relativistiche per la velocità w e per la direzione di propagazione di un'onda sono le stesse che quelle per il moto di una particella materiale dotata di velocità $u = \frac{c^2}{w}$ che si muova nella stessa direzione.

Dedurre lo stesso risultato dalla definizione del quadrivettore d'onda.

Esercizio C.2.16

Una sorgente in quiete nel riferimento del laboratorio emette radiazione luminosa di frequenza ν diretta perpendicolarmente alla superficie di uno specchio che si muove con velocità v nella stessa direzione della radiazione. Calcolare la frequenza osservata nel riferimento del laboratorio per il raggio di luce riflessa.

Esercizio C.2.17

Radiazione di frequenza ν viaggia formando un angolo θ con la direzione del moto di uno specchio che si avvicina con velocità v e la cui superficie riflettente è perpendicolare alla direzione del moto.

Calcolare la direzione del raggio di luce riflessa e determinare l'angolo limite per tale direzione in funzione di v.

Esercizio C.2.18

Analizzare il fenomeno dell'aberrazione stellare dal punto di vista classico e da quello relativistico.

Esercizio C.2.19

Dimostrare che la relazione che lega le direzioni di propagazione delle onde elettromagnetiche in differenti riferimenti inerziali può essere espressa mediante la formula

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\tan\frac{\alpha}{2}$$

Esercizio C.2.20

Dimostrare che la formula dell'aberrazione relativistica per i segnali elettromagnetici implica la relazione differenziale $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$ che a sua volta implica la relazione tra gli angoli solidi $\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right)^2$.

Esercizio C.2.21

Determinare la distribuzione angolare della radiazione elettromagnetica prodotta da una sorgente in movimento con velocità v assumendo che l'emissione sia isotropa nel riferimento di quiete della sorgente.

Calcolare la frazione della radiazione che viene emessa in avanti, ossia con un angolo $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ rispetto alla direzione del moto.

Esercizio C.2.22

Data una sorgente luminosa in moto con velocità v determinare l'ampiezza angolare del cono, avente come asse la direzione del moto e come vertice la sorgente, entro il quale viene emessa metà della radiazione (effetto faro).

Esercizio C.2.23

Determinare la forma del fronte d'onda elettromagnetico prodotto dal passaggio di una particella carica dotata di velocità v in un mezzo nel quale la velocità della luce vale $c' = \frac{c}{n}$, nel caso in cui $v > c'$ (effetto Cerenkov).

Esercizio C.2.24

Determinare la relazione che intercorre tra la distanza effettiva e la distanza ricavata dalle dimensioni (angolari) apparenti per un disco di area A che si muove con velocità v rispetto all'osservatore.

Esercizio C.2.25

Determinare la relazione che intercorre tra la distanza effettiva e la distanza ricavata dalla luminosità apparente per un disco di luminosità assoluta L che si muove con velocità v rispetto all'osservatore.

Esercizio C.2.26

Studiare, in funzione del tempo t dell'osservatore, la relazione tra posizione reale di un punto in moto rettilineo uniforme con legge oraria $x = vt, \;\; y = y_0$ e posizione "apparente" dello stesso punto per un osservatore in quiete nell'origine degli assi, tenendo conto del ritardo dovuto alla velocità finita di propagazione della luce.

Confrontare il risultato ottenuto con la legge di trasformazione dell'angolo formato dalla direzione di un fotone con l'asse delle x per una trasformazione di Lorentz di velocità v e mostrare la consistenza dei due risultati.

Esercizio C.2.27

Un raggio di luce la cui direzione forma un angolo θ con l'asse delle x colpisce la superficie posteriore (piana e riflettente) di un oggetto in moto parallelamente all'asse delle x.

Calcolare per quale valore limite di θ il raggio "riflesso" continua a viaggiare nella stessa direzione e verso del raggio incidente. Discutere le conseguenze di questo fenomeno sull'aspetto degli oggetti in movimento veloce.

Esercizio C.2.28

Dimostrare, sulla base delle relazioni valide per l'aberrazione relativistica, che, nonostante gli effetti di contrazione delle lunghezze, l'immagine di una sfera in moto rettilineo uniforme è un cerchio in tutti i riferimenti inerziali.

Esercizio C.2.29

Due punti materiali si muovono di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità $\mathbf{u}$ su due rette parallele. Posto $\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ il vettore che congiunge le posizioni dei due punti, esso risulta indipendente dal tempo in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Determinare le leggi di trasformazione di $\mathbf{d}$ nel passaggio a un riferimento in moto con velocità $\mathbf{v}$ rispetto al precedente e in particolare stabilire la legge con cui si trasforma il modulo quadro di $\mathbf{d}$.

Discutere il particolare il caso in cui i punti materiali sono fotoni che viaggiano alla velocità della luce ($|\mathbf{u}| = c$)) e nel riferimento iniziale soddisfano la condizione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = 0$.

Esercizio C.2.30

Mostrare che l'immagine ottica "ideale" di un oggetto in movimento, definita come l'immagine prodotta da un fascio di fotoni paralleli emessi dalla superficie dell'oggetto che giungono simultaneamente su una superficie ortogonale al fascio stesso, coincide con l'immagine dell'oggetto in quiete visto da un differente angolo visuale, malgrado gli effetti di contrazione relativistica delle lunghezze.

D.1 Dinamica relativistica

Esercizio D.1.1

Determinare la legge di trasformazione relativistica della densità di energia, considerando il moto (parallelo a una delle facce) di un parallelepipedo dotato di volume a riposo V_0 e di energia a riposo ε_0.

Esercizio D.1.2

Mostrare che nel processo di collisione totalmente anelastica di due masse uguali se si impone la conservazione della quantità di moto sia nel riferimento del centro di massa che in quello del laboratorio (in cui una delle due masse è ferma) si ottiene che la massa a riposo dello stato finale deve essere necessariamente $M = 2m\gamma(u_0)$ dove m è la massa a riposo dei costituenti e u_0 è il modulo delle loro velocità nel riferimento del c.m.

Mostrare sulla base del risultato precedente che l'energia relativistica è conservata.

Esercizio D.1.3

A partire dalla definizione della rapidità θ tale che $\tanh\theta = \frac{u}{c}$ mostrare che per una particella di massa m valgono le relazioni $p = mc\sinh\theta$ e $\varepsilon = mc^2\cosh\theta$.

Nel caso di trasformazioni di Lorentz collineari al moto, mostrare che vale:

$$\theta(u') = \theta(u) - \theta(v)$$

Esercizio D.1.4

Dimostrare che in un qualunque moto unidimensionale, posta θ la rapidità, vale la relazione $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{a_0}{c}$, dove a_0 è l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea e soddisfa la condizione $a^\mu a_\mu = -a_0^2$.

Esercizio D.1.5

La variabile di rapidità (longitudinale) per una particella di massa m in tre dimensioni è definita dalla relazione:

$$\theta_\parallel \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{\varepsilon + p_\parallel c}{\varepsilon - p_\parallel c},$$

dove ε è l'energia della particella e $p_\parallel$ è la componente dell'impulso parallela a una direzione assegnata (ad esempio la direzione del fascio).

Mostrare che, detta $p_\perp$ la componente dell'impulso ortogonale alla direzione assegnata, valgono le relazioni $\varepsilon = c\sqrt{m^2c^2 + p_\perp^2}\cosh\theta_\parallel$ e $p_\parallel = \sqrt{m^2c^2 + p_\perp^2}\sinh\theta_\parallel$ e valgono inoltre le relazioni differenziali:

$$d\theta_\parallel = \frac{dp_\parallel c}{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{p_\parallel c}.$$

Esercizio D.1.6

Esprimere la legge oraria (dipendenza di x da t) per il moto relativistico di un corpo soggetto ad accelerazione uniforme nel riferimento di quiete istantanea, parametrizzando la sua linea d'universo mediante la variabile rapidità $\tanh\theta = \frac{u}{c}$

Esercizio D.1.7

Un razzo si allontana da Terra sottoposto ad accelerazione g costante nel riferimento di quiete istantanea del razzo stesso.

Mostrare che esiste un tempo massimo T dopo la partenza, dopo il quale risulta impossibile inviare da Terra messaggi in grado di raggiungere il razzo. Calcolare la dipendenza di T da g.

Esercizio D.1.8

Mostrare che le soluzioni dell'equazione del moto $\frac{da^\mu}{d\tau} = \lambda^2 u^\mu$ corrispondono tutte a moti per i quali l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea a_0 è costante in modulo. Scrivere la soluzione generale dell'equazione del moto e determinare a_0 in funzione di λ.

Esercizio D.1.9

Dimostrare che l'equazione $\frac{da^\mu}{d\tau} = \lambda^2 u^\mu$ è completamente equivalente all'equazione vettoriale $\frac{d}{dt}(\gamma^3 \mathbf{a}) = 0$.

Esercizio D.1.10

Parametrizzare la soluzione generale dell'equazione $\frac{da^\mu}{d\tau} = \lambda^2 u^\mu$, riducendola grazie all'invarianza per rotazioni a un moto ristretto al piano (x, y) e dipendente da due parametri iniziali arbitrari.

Passare poi al riferimento in cui per $\tau = 0$ il sistema è in quiete istantanea e descrivere il moto in tale riferimento. Alternativamente passare al riferimento in cui per $\tau = 0$ la velocità è parallela all'accelerazione e descrivere il moto in tale riferimento.

Esercizio D.1.11

Un'asta è inizialmente in quiete lungo l'asse x di un riferimento inerziale. A partire dal tempo $t = 0$ si imprime un'accelerazione propria costante a_0 al punto di coordinata X_0. Definendo moto rigido quello in cui le distanze tra punti vicini restano costanti nel riferimento di quiete istantanea, determinare la legge oraria del moto nel riferimento iniziale per ogni punto dell'asta con coordinata iniziale X e calcolare l'accelerazione propria $a_0(X)$.

Esercizio D.1.12

Date due particelle relativistiche diverse caratterizzate dai loro quadrimpulsi p_1^μ e p_2^μ, avendo definito il quadrivettore $q^\mu \equiv p_1^\mu - p_2^\mu$, costruire per questo sistema la più generale quantità J_μ che sia un quadrivettore e che goda della proprietà $q^\mu J_\mu = 0$.

Esercizio D.1.13

Calcolare la variazione percentuale di frequenza di un fotone che, partendo dalla superficie terrestre, si muove nel campo gravitazionale, quando

a) il fotone sale a un'altezza h;

b) il fotone esce dal campo gravitazionale della Terra;

c) il fotone esce dal campo gravitazionale solare.

Esercizio D.1.14

Dimostrare che l'intervallo di tempo intercorrente tra due eventi situati sulla linea d'universo di una particella di velocità $\mathbf{u}$, l'energia della particella stessa e la frequenza di de Broglie associata alla velocità di fase $w = \frac{c^2}{u}$ obbediscono alla stessa legge di trasformazione relativistica.

Esercizio D.1.15

Il motore a reazione di un razzo relativistico espelle particelle di massa infinitesima m a una velocità v_r (velocità relativa del propellente) misurata nel riferimento di quiete istantanea del razzo.

Determinare in quale modo la velocità istantanea del razzo rispetto al riferimento di partenza dipende dalla massa iniziale M_i e dalla massa a riposo istantanea M. Discutere il limite nonrelativistico.

Discutere esplicitamente il caso limite di motore a emissione di fotoni.

Esercizio D.1.16

Mostrare che per un razzo a fotoni la relazione che intercorre tra la rapidità e la massa $\theta = \ln \frac{M_i}{M_f}$ discende direttamente dalla legge di conservazione dell'energia e dell'impulso.

Spiegare perché l'argomento non si applica alla propulsione mediante emissione di particelle dotate di massa.

Esercizio D.1.17

Formulare in modo completamente covariante il problema della determinazione della dipendenza della velocità v dalla massa variabile M nel moto relativistico di un razzo accelerato mediante emissione di particelle di massa infinitesima dotate di velocità v_r nel riferimento di quiete istantanea del razzo.

A tal fine dimostrare preliminarmente che, nei problemi unidimensionali, tra la variazione infinitesima del vettore quadrivelocità e la variazione infinitesima della rapidità intercorre la relazione differenziale $dU^\mu dU_\mu = -c^2(d\theta)^2$.

Esercizio D.1.18

Un sistema di massa a riposo M è costituito da particelle soggette a decadimento elettromagnetico confinate in un recipiente (di massa trascurabile rispetto a M) dal quale mediante riflessioni multiple i fotoni prodotti possono uscire soltanto in una direzione. Sia τ_0 la vita media delle particelle nel loro riferimento di quiete, per cui il numero N delle particelle non decadute soddisfa la relazione $\frac{dN}{d\tau} = -\frac{N}{\tau_0}$. Sia m_0 la massa di riposo delle particelle e gli unici prodotti del decadimento siano fotoni.

Mostrare che il sistema descritto risulta soggetto a un'accelerazione costante nel riferimento di quiete istantanea e calcolare tale accelerazione.

Esercizio D.1.19

Mostrare che per una particella relativistica non soggetta a forze il tensore antisimmetrico $L^{\mu\nu} \equiv X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu$ è conservato. Proporre un'interpretazione fisica dei due vettori conservati associati al tensore $L^{\mu\nu}$.

Esercizio D.1.20

Mostrare che per una particella relativistica dotata di momento angolare intrinseco $S^{\mu\nu}$ e di momento angolare totale $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$ è possibile, a partire da $J^{\mu\nu}$ e dal quadrimpulso P^μ, costruire un quadrivettore S_μ (polarizzazione), conservato se sono conservati momento angolare e quadrimpulso, e che gode della proprietà $S_\mu P^\mu = 0$. Mostrare che il modulo di S_μ dipende soltanto dal modulo dello spin della particella.

Esercizio D.1.21

Dato un insieme di particelle relativistiche interagenti soltanto tramite collisioni, a partire dalla conservazione del tensore $L^{\mu\nu} = \sum x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ mostrare che è possibile definire la posizione del centro di inerzia in modo tale che il suo moto sia rettilineo uniforme, ma che tale definizione non è covariante per trasformazioni di Lorentz.

Esercizio D.1.22

Dato un insieme di punti materiali liberi in una dimensione, determinare la relazione esistente tra le posizioni del centro d'inerzia del sistema all'istente $t = t' = 0$ calcolate in due riferimenti che hanno le origini degli assi coincidenti all'istante iniziale e si muovono con velocità relativa v.

Verificare che nel caso in esame la posizione del centro d'inerzia ha le proprietà della componente spaziale di un vettore sotto trasformazioni di Lorentz.

Esercizio D.1.23

Due punti materiali di uguale massa si muovono in direzioni opposte su due rette parallele. Nel riferimento del centro di massa le loro velocità hanno quindi lo stesso modulo u. All'istante $t = 0$ i due punti si trovano alla minima distanza $2d$ e il loro centro d'inerzia si trova nell'origine.

Determinare all'istante $t' = 0$ la posizione del centro d'inerzia calcolato in un riferimento in moto con velocità $\mathbf{v}$ e discuterne l'evoluzione temporale.

Esercizio D.1.24

Una particella relativistica è completamente caratterizzata dal suo quadrimpulso P^μ (generatore delle traslazioni) e dal tensore antisimmetrico $J^{\mu\nu}$ (generatore delle trasformazioni di Lorentz). A partire da questi tensori è possibile costruire i quadrivettori

$$R_\mu \equiv J_{\mu\nu} P^\nu, \qquad\qquad S_\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma .$$

Dimostrare che vale $R_\mu P^\mu = 0$, $S_\mu P^\mu = 0$ e che, nel caso in cui $P^2 \neq 0$, allora $J^{\mu\nu}$ può essere rappresentato in termini di P^μ, R^μ e S^μ grazie alla relazione

$$P^2 J^{\mu\nu} = R^\mu P^\nu - R^\nu P^\mu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} S_\rho P_\sigma .$$

Costruire gli invarianti indipendenti sotto trasformazioni di Lorentz e discuterne le proprietà sotto traslazioni, individuando gli invarianti del gruppo di Poincarè.

Esercizio D.1.25

La definizione generale di volume invariante di spazio delle fasi a n corpi è

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum_{k=1}^{n} p_k) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2p_i^0 (2\pi)^3}$$

dove $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e si è posto $c = 1$.

Mostrare che la definizione data risulta invariante per trasformazioni di Lorentz.

Calcolare lo spazio delle fasi differenziale a due corpi come funzione delle sole variabili angolari e lo spazio delle fasi totale a due corpi.

Calcolare lo spazio delle fasi differenziale a tre corpi come funzione delle variabili di energia nel riferimento del centro di massa.

Esercizio D.1.26

Scrivere l'espressione covariante del tensore energia-impulso per una distribuzione di materia relativistica non interagente e mostrare esplicitamente la sua conservazione.

Esercizio D.1.27

Scrivere l'espressione covariante del tensore energia-impulso per una distribuzione di materia relativistica soggetta a forze interne rappresentabili come un campo di pressione.

Esercizio D.1.28

Formulare la teoria cinetica dei gas perfetti relativistici esprimendo la densità e la pressione di un gas di particelle identiche non interagenti in funzione dei valori medi delle variabili dinamiche microscopiche delle molecole che lo compongono.

Esercizio D.1.29

Discutere la termodinamica di un gas perfetto relativistico, nell'ipotesi che valga la distribuzione di Boltzmann, deducendo in particolare la relazione che lega il valor medio dell'energia di una singola particella alla temperatura.

Esercizio D.1.30

Discutere la termodinamica di un gas di particelle libere relativistiche in d dimensioni, nell'ipotesi che valga la distribuzione di Boltzmann, ricavando in particolare la relazione tra pressione e temperatura, nota la densità di massa μ.

D.2 Cinematica dei decadimenti

Esercizio D.2.1

Determinare l'angolo formato nel riferimento del laboratorio dalle direzioni di moto dei prodotti di un processo di decadimento in due fotoni, come ad esempio il processo $\pi_0 \to \gamma\gamma$, essendo v la velocità della particella che decade. Parametrizzare il risultato in funzione dell'angolo tra la direzione del moto dei fotoni e quella del moto del laboratorio nel riferimento del centro di massa. Calcolare l'angolo minimo tra i fotoni.

Esercizio D.2.2

Considerare la transizione tra due livelli di un atomo di massa M inizialmente in quiete. Se la transizione avviene a causa dell'emissione di un fotone, che relazione intercorre tra l'energia ε del fotone irraggiato e la differenza di energia ε_0 tra i due livelli atomici?

Esercizio D.2.3

Determinare la relazione tra l'angolo di diffusione e l'energia delle particelle diffuse, nel riferimento del laboratorio, nel caso di decadimento a due corpi.

Esercizio D.2.4

Studiare sotto quali condizioni è possibile che in un processo di decadimento in due fotoni almeno uno dei due fotoni per annichilazione dia luogo alla produzione di una coppia di particelle e^+e^-. Calcolare la probabilità che uno dei due fotoni sia sotto la soglia per la produzione di coppie come funzione dell'energia della particella che decade.

Esercizio D.2.5

Una particella di massa sconosciuta decade in due corpi nel riferimento del laboratorio. È possibile misurare le masse m_1 ed m_2 dei prodotti del decadimento, le loro energie E_1 ed E_2 e l'angolo θ_1 che la direzione del moto della prima particella forma con la direzione del fascio delle particelle che decadono. Determinare la massa M_x della particella che decade.

Risolvere lo stesso problema nel caso in cui non sia possibile misurare m_2 ma risulti possibile conoscere θ_2.

Esercizio D.2.6

Una particella di massa M dotata di energia E nel riferimento del laboratorio decade in due particelle di uguale massa m (si consideri ad esempio il caso $K^0 \to \pi^+\pi^-$).

Determinare l'energia massima e minima delle particelle prodotte.

In caso di decadimento isotropo nel riferimento del centro di massa, determinare la distribuzione dei prodotti di decadimento come funzione dell'angolo tra la direzione del fascio iniziale e la direzione della particella prodotta.

Determinare il valore massimo e minimo dell'angolo φ formato dalle direzioni dei prodotti di decadimento, e la distribuzione dei prodotti stessi in funzione di φ.

Esercizio D.2.7

Una particella di massa M dotata di energia E nel riferimento del laboratorio decade in due particelle di cui una di massa m e l'altra di massa nulla (si consideri ad esempio il caso $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm}\nu$).

Determinare il valore massimo e minimo dell'angolo φ formato dalle direzioni dei prodotti di decadimento.

Esercizio D.2.8

Un atomo eccitato di massa M in moto con velocità v nel riferimento del laboratorio decade nello stato di massa M' emettendo un fotone.

Nel caso semirelativistico in cui $M - M' \ll M$ determinare la cinematica del decadimento e in particolare la relazione tra velocità finale v' dell'atomo e angolo φ formato dalle direzioni di moto finali.

Determinare l'intervallo di valori possibili di v' e il valore minimo di φ.

Esercizio D.2.9

Un atomo eccitato con energia di eccitazione ε_0 decade in volo allo stato fondamentale di massa M emettendo un fotone di energia ε.

Nel caso particolare in cui l'atomo nello stato finale risulta fermo determinare ε in funzione di ε_0 ed M.

Esercizio D.2.10

Una particella ferma di massa M decade in due particelle le cui velocità risultano essere v_1 e v_2. Calcolare le masse delle particelle prodotte.

Esercizio D.2.11

Una particella di massa M, in volo con velocità v, decade in due fotoni.

Determinare esplicitamente, nel riferimento del laboratorio, la distribuzione angolare di ciascun fotone rispetto alla direzione di diffusione e la distribuzione dei due fotoni in funzione dell'angolo formato dalle loro direzioni di moto.

Esercizio D.2.12

Qual è la massima velocità relativa possibile tra due particelle di massa m_1 ed m_2 che siano state prodotte in una reazione di decadimento $M \to m_1 + m_2 + m_3$?

Esercizio D.2.13

Nel caso di decadimento a tre corpi, nel riferimento del centro di massa, esprimere l'energia di uno dei prodotti di decadimento in funzione della velocità relativa degli altri due.

Esercizio D.2.14

Mostrare che nei processi di decadimento a tre corpi la condizione di annullamento del modulo del quadrivettore $L_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma$ coincide con la forma invariante di

Lorentz della condizione fisica per la determinazione della frontiera del dominio corrispondente all'insieme dei valori cinematicamente possibili per le energie dei prodotti di decadimento nel riferimento del centro di massa.

Esercizio D.2.15

Determinare la condizione algebrica che fissa i confini del dominio cinematico dei valori possibili per le energie ε_i nel riferimento del centro di massa per un processo di decadimento a tre corpi nel caso particolare in cui le tre particelle finali abbiano massa a riposo nulla. Disegnare la regione in questione nel piano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Esercizio D.2.16

Considerare il processo di decadimento in tre corpi $\eta \to \pi^0\gamma\gamma$, per il quale sono note le masse M_η e m_π.

Determinare la regione dei valori delle energie dei due fotoni ε_1 ed ε_2 nel riferimento del centro di massa per i quali il decadimento è cinematicamente possibile e disegnare schematicamente la frontiera della regione in questione nel piano $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Esercizio D.2.17

In un particolare decadimento in tre corpi di uguale massa m, nel riferimento del centro di massa i tre corpi si allontanano l'uno dall'altro con uguale energia ε formando angoli di $\frac{2\pi}{3}$ tra le loro direzioni di moto.

Qual è l'angolo che formano fra loro le direzioni di moto di due qualunque dei tre corpi nel riferimento in cui il terzo è in quiete?

Esercizio D.2.18

Sfruttando la proprietà del triangolo equilatero per cui la somma delle distanze dai lati di un punto qualunque interno al triangolo è costante, mostrare che è possibile associare in modo invariante i processi di decadimento a tre corpi ai punti interni a un triangolo equilatero (plot di Dalitz).

Nel caso in cui le masse m dei prodotti di decadimento sono tra loro uguali, calcolare la forma della curva (interna al triangolo) che costituisce la frontiera del dominio cinematico. Se M è la massa dell'oggetto che decade, discutere i limiti $m \to 0$ e e $m \to \frac{M}{3}$.

Esercizio D.2.19

Nel riferimento di quiete di una particella di massa M che decade in N corpi, determinare la massima energia che può essere raggiunta da un corpo di massa m_N prodotto nel decadimento, poste uguali a $\{m_i\}$ le masse degli altri $N-1$ corpi.

Esprimere il risultato in termini di $\Delta M \equiv M - \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Esercizio D.2.20

Una particella di massa M dotata di energia E nel riferimento del laboratorio decade in tre particelle di uguale massa m (si consideri ad esempio il decadimento $K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$).

Determinare la massima energia che può essere raggiunta in tale riferimento da uno qualunque dei tre prodotti del decadimento.

D.3 Cinematica della diffusione

Esercizio D.3.1

Dimostrare che per una coppia di particelle di masse m_i e quadrimpulsi p_i, essendo v_r il modulo della velocità relativa delle due particelle, vale la relazione

$$\gamma(v_r) = \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 m_2\, c^2}$$

Esercizio D.3.2

Determinare l'angolo massimo di diffusione di una particella di massa m_1 che incide con velocità v su una particella ferma di massa $m_2 < m_1$.

Calcolare il corrispondente valore della velocità finale per la particella diffusa.

Esercizio D.3.3

Discutere la cinematica per il problema dell'urto relativistico tra particelle di uguale massa, nel riferimento del centro di massa e in quello del laboratorio.

Esercizio D.3.4

Nel caso di collisione tra due particelle identiche, delle quali una è in quiete e una in moto con velocità u, determinare in funzione di u la velocità del centro di massa del sistema e il corrispondente fattore γ. Confrontare la rapidità θ della particella incidente con quella del centro di massa.

Esercizio D.3.5

Sulla base dei risultati ottenuti per la relazione tra energia finale e angolo di diffusione in un processo di decadimento a due corpi, ricavare l'analoga relazione per un processo di diffusione elastica visto nel riferimento del laboratorio.

Esercizio D.3.6

Calcolare l'angolo φ formato dalle direzioni di volo di due particelle identiche di massa M dopo la loro collisione elastica nel riferimento del laboratorio (in cui una delle due particelle era ferma e l'altra possedeva energia E), sotto l'ipotesi che nello stato finale le due particelle abbiano la stessa energia.

Esercizio D.3.7

Studiare il processo di collisione elastica tra particelle identiche nel riferimento del laboratorio, parametrizzando le quantità misurate in temini dell'angolo θ_0 con cui avviene la diffusione nel riferimento del centro di massa.

Esercizio D.3.8

Nel processo di collisione elastica tra un fotone e un elettrone in moto nella stessa direzione, determinare quale deve essere la velocità iniziale dell'elettrone affinché, nel caso di riflessione nella direzione opposta a quella di incidenza, il fotone riflesso abbia la stessa energia ε di quello incidente.

Esercizio D.3.9

Nel caso della diffusione Compton determinare la relazione che lega l'angolo φ di diffusione dell'elettrone all'angolo θ di diffusione del fotone.

Esercizio D.3.10

Mostrare che nel processo di collisione in cui $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, dette m_i le masse delle particelle coinvolte, e posto $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$, vale la relazione $s + t + u = \Sigma_i m_i^2$.

Esercizio D.3.11

Determinare sul piano delle variabili di Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$, la forma della frontiera della regione cinematica che corrisponde ai processi possibili nel caso delle collisioni, elastiche o inelastiche, per le quali vi sono solo due particelle anche nello stato finale.

Esercizio D.3.12

Due particelle, ciascuna di massa M, collidono con velocità relativa v_r. La collisione produce quattro particelle di masse m_1, m_2, m_3, m_4.

Qual era l'energia di ciascuna delle due particelle in collisione nel riferimento del centro di massa del sistema?

Qual è la massima energia che la particella di massa m_1 potrà ricevere nel riferimento del centro di massa?

Esercizio D.3.13

Un'antiparticella dotata di massa M ed energia E colpisce una particella ferma e il sistema decade per annichilazione in due fotoni, che risultano diretti nella direzione del moto dell'antiparticella.

Calcolare le energie dei due fotoni sia nel riferimento del laboratorio che in quello della particella incidente, effettuando esplicitamente la trasformazione di Lorentz e discutendo poi il risultato ottenuto.

Esercizio D.3.14

Nel processo di annichilazione $e^+e^- \to \gamma\gamma$ visto nel riferimento del laboratorio, in cui l'elettrone è fermo e il positrone possiede energia E, può accadere che uno dei due fotoni venga emesso ad angolo retto rispetto alla direzione di incidenza del positrone.

Calcolare in tal caso l'energia e l'angolo di diffusione dell'altro fotone.

Esercizio D.3.15

Calcolare l'energia di soglia nel riferimento del laboratorio per il processo $m_1 + m_2 \to \{m_i\}$ per il quale valga la relazione $\Sigma_i m_i - m_1 - m_2 \equiv \Delta M > 0$

Calcolare l'energia di soglia (energia cinetica minima) nel corrispondente processo nonrelativistico endoenergetico con assorbimento di energia ΔM e confrontare con il risultato precedente.

Esercizio D.3.16

Determinare il valore della massima massa M_x che può essere prodotta in una collisione di particelle identiche di massa m nel riferimento del laboratorio (in cui una delle due particelle era ferma e l'altra possedeva energia E), nell'ipotesi che le particelle in collisione siano presenti anche nello stato finale (processo $a + b \to a + b + x$).

Esercizio D.3.17

Un fotone incide su un protone fermo e attiva la reazione $\gamma + p \to n + \pi^+$.

Assumendo che le masse del protone e del neutrone siano approssimativamente uguali, e poste m_N la massa del nucleone, m_π la massa del mesone, trovare la frequenza di soglia ν_0 del fotone per la quale il processo diventa possibile.

Se il processo avviene esattamente in soglia, trovare la vita media del π^+ nel riferimento del laboratorio sapendo che la vita media in quiete è τ_0.

Se il π^+ così prodotto decade a sua volta in un mesone μ (la cui massa a riposo è m_μ) e in un neutrino (la cui massa a riposo è nulla), determinare la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento.

Esercizio D.3.18

Calcolare la minima energia che deve essere posseduta da un fotone inviato su un elettrone fermo affinché sia possibile che nel processo di collisione inelastica si produca una coppia e^+e^- (processo $\gamma + e^- \to e^-e^+e^-$).

Esercizio D.3.19

Calcolare le energie di soglia per i processi di collisione $\pi - N$ e $N - N$ in cui vengono prodotti uno o due nuovi mesoni π.

Esercizio D.3.20

Calcolare le energie di soglia per la produzione di coppie $N - \bar{N}$ in collisioni fotone-elettrone ed elettrone-elettrone.

E Elettromagnetismo relativistico

Esercizio E.1

Determinare il raggio e la frequenza di girazione per il moto di una carica in un campo magnetico uniforme e costante, in funzione della carica, del campo e della velocità.

Esercizio E.2

Determinare la legge oraria del moto di una carica soggetta alla forza di Lorentz e sottoposta a un campo elettrico uniforme e costante, facendo uso della legge del moto e, alternativamente, del teorema delle forze vive.

Calcolare la relazione tra l'accelerazione propria (misurata nel riferimento inerziale di quiete istantanea della carica) e l'accelerazione misurata nel riferimento del laboratorio.

Calcolare la relazione esistente tra il tempo proprio della carica e il tempo del laboratorio nel corso del moto a partire dalla condizione iniziale $v = 0$

Esercizio E.3

Studiare il moto relativistico di una carica e collocata in campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ uniformi, costanti e paralleli tra loro.

Esercizio E.4

Studiare il moto relativistico di una carica e collocata in campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ uniformi, costanti, ortogonali tra loro e uguali in modulo,

Esercizio E.5

Dati un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniformi e costanti, che formano tra loro un angolo θ, determinare la velocità di un sistema di riferimento nel quale i campi trasformati risultano paralleli.

Esercizio E.6

Un corpo di massa m e carica q è immerso in un campo elettrico $\mathbf{E}$ uniforme e costante, ed è dotato di una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ ortogonale a $\mathbf{E}$.

Risolvere le equazioni del moto e determinare la forma della traiettoria.

Esercizio E.7

Trovare la soluzione dell'equazione del moto relativistico per una particella di carica q e massa m immersa nel campo di un'onda elettromagnetica piana.

Esercizio E.8

Scrivere l'equazione relativisticamente covariante che governa l'evoluzione temporale della polarizzazione di una particella in moto in un campo magnetico, sapendo che essa si trasforma come un quadrivettore S_μ con la proprietà che $S^\mu S_\mu = -\mathbf{s}^2$ (modulo dello spin), che $p^\mu S_\mu = 0$ e che nel limite nonrelativistico vale

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = g\mu_0 \mathbf{s} \wedge \mathbf{B}$$

dove, posto $\mu_0 \equiv \frac{q}{2mc}$, $g\mu_0\mathbf{s}$ è il momento magnetico e $\mathbf{B}$ è un campo magnetico uniforme.

Esercizio E.9

Mostrare che la forma covariante della forza di Lorentz scritta in termini del quadripotenziale A_μ e della quadrivelocità U^μ assicura che sia automaticamente soddisfatta l'equazione valida per le quadriforze $F_\mu U^\mu = 0$.

Esercizio E.10

Mostrare che la covarianza di Lorentz del tensore campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ implica che le combinazioni scalari $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Esercizio E.11

Determinare la velocità del riferimento inerziale nel quale, quando nel riferimento di partenza vale la proprietà (invariante di Lorentz) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, risulta presente soltanto uno dei due campi.

Specificare sotto quali condizioni è presente solo il campo elettrico e sotto quali condizioni è presente solo quello magnetico.

Esercizio E.12

Dimostrare l'invarianza di Lorentz degli autovalori del tensore campo elettromagnetico ${F_\mu}^\nu$ e calcolarne il valore.

Esercizio E.13

Determinare la forma delle trasformazioni di Lorentz per le combinazioni di campi elettromagnetici definite dalle relazioni $\mathbf{C}_\pm \equiv \mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$.

Esercizio E.14

Dimostrare che per qualunque configurazione di campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ vale la relazione invariante di Lorentz $F^\mu_\nu F^\nu_\rho F^\rho_\mu = 0$.

Esercizio E.15

Dimostrare che per qualunque configurazione di campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ vale la proprietà $\det F^\mu_\nu == -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2$. Discutere il carattere invariante di tale uguaglianza e porla in relazione con le proprietà dello pfaffiano di una matrice antisimmetrica.

Esercizio E.16

Scrivere in forma covariante le espressioni dei potenziali di Liènard e Wiechert e dei campi elettromagnetici ad essi associati. Calcolare il valore dell'invariante $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ per tali campi.

Esercizio E.17

Calcolare il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ generato da una particella di carica e soggetta a moto iperbolico con accelerazione $\mathbf{a}$ costante nel riferimento di quiete istantanea.

Esercizio E.18

La formula di Larmor nonrelativistica esprime la potenza emessa per irraggiamento da una particella di carica q (vista in un riferimento in cui la velocità della particella è trascurabile) sottoposta a un'accelerazione a. La potenza vale allora $I = \frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}$.

Costruire un'espressione che esprima tale potenza nel caso di moto relativistico della carica.

Esercizio E.19

Calcolare la potenza dissipata negli acceleratori di particelle cariche, sia nel caso di acceleratori lineari che nel caso di acceleratori circolari.

Esercizio E.20

Ricordando che la formula nonrelativistica per la reazione di radiazione per una particella di carica e e accelerazione $\mathbf{a}$ è $\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}}$, determinare la forma relativistica di tale espressione e applicarla al caso del moto iperbolico.

Calcolare l'energia totale perduta e confrontare con l'espressione data dalla formula di Larmor relativistica per l'energia irraggiata.

Esercizio E.21

Scrivere l'espressione covariante del tensore energia-impulso per il campo elettromagnetico e dedurne la formula della pressione di radiazione.

Esercizio E.22

Calcolare la pressione di radiazione esercitata da un'onda elettromagnetica piana incidente con un angolo θ rispetto alla normale di uno specchio in moto di avvicinamento con velocità v, ricavandola dalla differenza tra il flusso di energia incidente e il flusso di energia riflessa. Confrontare il risultato ottenuto, nel limite $v \to 0$, con il calcolo basato sul flusso d'impulso.

Effettuare la trasformazione di Lorentz al riferimento in cui lo specchio è fermo, e discutere il significato del risultato.

Esercizio E.23

Dimostrare che il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico $T_\mu^{\ \nu}$ soddisfa le relazioni $T_\mu^{\ \mu} = 0$ e $T_\mu^{\ \alpha} T_\alpha^{\ \nu} = \lambda^2 \delta_\mu^{\ \nu}$, dove $\lambda^2 = \frac{1}{16}\left[(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})^2 + (\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta})^2\right]$.

Esercizio E.24

Dimostrare che, nel caso di onde elettromagnetiche piane cui sia associato un quadrivettore d'onda k^μ, il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico può essere scritto nella forma $T^{\mu\nu} = \lambda^2 E^2 k^\mu k^\nu$, dove $E = \mathbf{E} = \mathbf{B}$ e $\lambda = \frac{c}{\nu}$ è la lunghezza d'onda.

Dedurre dal risultato precedente le proprietà di trasformazione del rapporto $\frac{E}{\nu}$.

Esercizio E.25

A partire dalla definizione del tensore $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, duale del tensore campo elettromagnetico, dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \qquad F^*_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$T_\mu^{\ \nu} \equiv \frac{1}{4}\delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\alpha\mu}F^{\alpha\nu} = -\frac{1}{2}(F_{\alpha\mu}F^{\alpha\nu} + F^*_{\alpha\mu}F^{*\alpha\nu})$$

Esercizi di Meccanica Analitica

A.1 Calcolo delle variazioni

Esercizio A.1.1

Determinare la curva che rappresenta il cammino percorso nel più breve tempo possibile da una particella che si muove tra due punti assegnati nel piano (xy) sotto l'azione di un campo gravitazionale uniforme (problema della brachistocrona).

Esercizio A.1.2

Determinare la forma della curva di lunghezza assegnata L che minimizza l'energia potenziale gravitazionale, date le posizioni degli estremi, assumendo una massa per unità di lunghezza μ (problema della catenaria). Calcolare esplicitamente i parametri della curva nel caso in cui i punti di sospensione si trovino alla stessa quota.

Esercizio A.1.3

Determinare il cammino più breve tra due punti collocati su una stessa superficie sferica (problema del cerchio massimo).

Esercizio A.1.4

Determinare la forma della curva di lunghezza assegnata L che interseca l'asse delle ascisse in due punti assegnati e massimizza l'area della regione compresa tra la curva e l'asse delle ascisse.

Esercizio A.1.5

Mostrare che il percorso più breve tra due punti nello spazio è un segmento di retta.

Esercizio A.1.6

Mostrare che la geodetica sulla superficie di un cilindro è un segmento di elica.

Esercizio A.1.7

Determinare la forma della geodetica sulla superficie di un cono.

Esercizio A.1.8

Calcolare il tempo impiegato a raggiungere il punto più basso della cicloide da un punto materiale che parta da fermo da un punto qualunque della curva.

Esercizio A.1.9

Ricavare l'equazione differenziale che determina le curve che rappresentano i cammini di minima distanza (geodetiche) tra coppie di punti assegnati su una varietà in d dimensioni descritta dalle coordinate x^i e dalla metrica $d\ell^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i dx^j$.

Esercizio A.1.10

Calcolare i simboli di Christoffel e determinare l'equazione per le geodetiche nel caso di una superficie di rotazione i cui punti, in coordinate cilindriche (ρ, φ, z), sono identificati dalla funzione $z = f(\rho)$.

Confrontare il risultato ottenuto con l'equazione risultante dalla condizione di cammino minimo imposta sulle curve giacenti sulla stessa superficie, se si rappresentano tali curve mediante le funzioni $\varphi(\rho)$

A.2 Formalismo lagrangiano

Esercizio A.2.1

Ricavare la generalizzazione delle equazioni di Eulero-Lagrange che corrisponde al caso in cui la lagrangiana (generalizzata) è della forma $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, nell'ipotesi che anche la variazione di $\dot{q}$ si annulli agli estremi.

Esercizio A.2.2

Trattare il problema della macchina di Atwood nel formalismo lagrangiano.

Esercizio A.2.3

Scrivere la lagrangiana di un punto materiale di massa m che si muove in un campo di forze centrali

a) in coordinate cartesiane ortogonali
b) in coordinate cilindriche
c) in coordinate sferiche

Esercizio A.2.4

A partire dall'espressione della Lagrangiana in coordinate polari per una particella in un campo di forze centrali, dedurre le equazioni di Eulero-Lagrange associate alle coordinate θ, φ.

Dimostrare che la quantità $m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2) \equiv L^2$ è conservata in virtù delle equazioni di Lagrange.

Esercizio A.2.5

Scrivere le equazioni del moto di Lagrange per un pendolo sferico in coordinate polari e ricondurre a quadrature la soluzione del problema.

Esercizio A.2.6

Studiare il pendolo cicloidale dimostrando che esso corrisponde a un caso di isocronismo esatto e indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni.

Esercizio A.2.7

Scrivere e risolvere le equazioni del moto lagrangiane per il pendolo di Foucault.

Esercizio A.2.8

Mostrare esplicitamente che, per la Lagrangiana (in coordinate cartesiane)

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r},t) - \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{v}$$

quando vale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \nabla\Lambda(\mathbf{r},t), \quad V(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\Lambda}{\partial t}(\mathbf{r},t),$$

dove $\Lambda(\mathbf{r},t)$ è una funzione arbitraria, allora le equazioni del moto coincidono con quelle della particella libera. Giustificare il risultato sulla base delle proprietà di invarianza della Lagrangiana.

Esercizio A.2.9

Considerare il sistema costituito da un filo passante per due carrucole fisse e per una carrucola mobile collocata tra le due precedenti. Alle estremità del filo sono appese due masse m_1 ed m_2, mentre alla carrucola mobile è appesa una massa M.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e risolvere le equazioni lagrangiane del moto della particella di massa M. Qual è la condizione necessaria affinché M rimanga in quiete?

Esercizio A.2.10

Considerare il sistema formato da due masse uguali m, poste sul piano xy e vincolate a muoversi su due guide prive di attrito tra loro ortogonali. Tra le due masse si esercita una forza mutuamente attrattiva dipendente soltanto dalla distanza tra le masse. Scrivere la Lagrangiana del sistema, confrontarla con quella di un corpo in un campo di forze esterne e dedurre le eventuali leggi di conservazione.

Esercizio A.2.11

Determinare le costanti del moto per un punto materiale soggetto a forze conservative generate da un campo di forze dotato di simmetria elicoidale, ossia invariante sotto la trasformazione $\delta z = K\delta\varphi, \quad \delta\rho = 0$.

Esercizio A.2.12

Scrivere la Lagrangiana per un pendolo semplice il cui punto di sospensione sia forzato a muoversi seguendo la legge oraria assegnata $(x_0, z_0) = (x_0(t), z_0(t))$ sul piano verticale (x, z) sul quale avviene l'oscillazione.

Utilizzare le proprietà della Lagrangiana per esprimere il risultato in una forma dipendente soltanto da $(\ddot{x}_0, \ddot{z}_0)$ ma non da (x_0, z_0) né da $(\dot{x}_0, \dot{z}_0)$ (relatività galileiana).

Esercizio A.2.13

La Lagrangiana di un sistema unidimensionale di massa m vale:

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x).$$

Trovare le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare con il formalismo Lagrangiano la legge di conservazione dell'energia. Individuare un sistema lagrangiano più semplice del precedente al quale lo stesso può essere ricondotto.

Esercizio A.2.14

Sia data la Lagrangiana

$$L = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k-1} \binom{N}{k} (\frac{m}{2}\dot{x}^2)^k V(x)^{N-k}.$$

Dimostrare che, per ogni valore intero positivo di N, le equazioni del moto risultano equivalenti a quelle che si ricavano nel caso $N = 1$.

Determinare la forma dell'integrale primo associato all'assenza di una dipendenza esplicita dal tempo e stabilirne la relazione con l'energia del sistema nel caso $N = 1$.

Esercizio A.2.15

Considerare la classe delle Lagrangiane della forma $L(x, \dot{x}) = F[m(x)\dot{x}]$, dove F è una funzione arbitraria del proprio argomento e $m(x)$ è una funzione data.

Dimostrare che le soluzioni delle equazioni del moto sono comuni a tutte le lagrangiane di questa classe. Data una funzione $n(x)$ che goda della proprietà che $\frac{dn(x)}{dx} = m(x)$, scrivere in termini di $n(x)$ la relazione che permette di determinare (implicitamente) la dipendenza di x da t.

Esercizio A.2.16

Studiare con il formalismo lagrangiano il moto di una particella di carica q soggetta a un potenziale centrale e in presenza di un campo magnetico uniforme costante.

Sulla base delle simmetrie del sistema individuare una possibile coordinata ciclica e il corrispondente momento coniugato conservato. Fornire un'interpretazione fisica di tale legge di conservazione.

Esercizio A.2.17

Studiare il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla gravità e vincolato a muoversi sulla superficie di un cono di apertura angolare 2α il cui asse è disposto verticalmente e il cui vertice è rivolto verso il basso.

Individuare la costante del moto associata alla simmetria del sistema. Determinare la condizione per cui le orbite risultano circolari.

Esercizio A.2.18

Discutere nel formalismo lagrangiano il problema della deviazione dei gravi verso Est per il caso di un grave posto all'Equatore che cade da un'altezza h.

Esercizio A.2.19

Una particella di massa m è ferma su una guida liscia orizzontale. La guida viene inclinata ruotandola con velocità angolare costante ω intorno a uno dei suoi estremi.

Determinare la legge del moto della particella.

Esercizio A.2.20

Una retta giacente su un piano verticale ruota con velocità angolare costante ω intorno a un punto, giacente sul piano, posto a distanza d dalla retta stessa.

Scrivere la Lagrangiana e la legge oraria del moto di un punto soggetto alla gravità e vincolato a muoversi sulla retta.

Esercizio A.2.21

Un sistema è costituito da un punto materiale di massa m che si muove su una guida semicircolare di massa M disposta con la concavità rivolta verso l'alto e libera di muoversi orizzontalmente.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e ricavare le equazioni del moto, discutendo le eventuali leggi di conservazione.

Esercizio A.2.22

Scrivere la Lagrangiana per un pendolo sferico carico di massa m, lunghezza l e carica q immerso in un campo magnetico uniforme B orientato lungo la verticale.

Discutere la legge di conservazione associata all'invarianza per rotazioni intorno a un asse verticale.

Esercizio A.2.23

Un punto materiale di massa m soggetto alla forza di gravità è vincolato a muoversi in un piano verticale su una guida priva di attrito descritta dall'equazione $z = f(x)$.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e ricavare l'equazione del moto, mostrando che può essere ridotta a quadrature.

Esercizio A.2.24

Data la Lagrangiana in una dimensione

$$L = e^{\frac{\gamma}{m}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2\right),$$

ricavare l'equazione del moto e discuterne le soluzioni.

Dimostrare che esiste per questo sistema una quantità conservata della forma

$$G(x,\dot{x},t) = f(t)\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\gamma x\dot{x} + \frac{1}{2}Kx^2\right]$$

e trovare la forma esplicita di $f(t)$.

Discutere la possibile esistenza di quantità conservate della forma

$$\bar{G}(x,\dot{x},t) = A(t)m\dot{x}^2 + B(t)\gamma x\dot{x} + C(t)Kx^2$$

Esercizio A.2.25

Data una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica K, un suo estremo si muove di moto assegnato $X(t)$ mentre l'altro estremo è connesso a un punto materiale di massa m.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e discutere l'equazione del moto.

Esercizio A.2.26

Mostrare che, se l'equazione del moto di un sistema è invariante per traslazioni temporali

$$q \to q, \qquad \dot{q} \to \dot{q}, \qquad t \to t + \delta t,$$

allora si può scegliere la Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ in modo tale che essa risulti esplicitamente indipendente da t.

Esercizio A.2.27

Mostrare che, se l'equazione del moto di un sistema è invariante per traslazioni spaziali

$$q \to q + \delta, \qquad \dot{q} \to \dot{q}, \qquad t \to t,$$

e la Lagrangiana è indipendente dal tempo, allora la condizione di invarianza della Lagrangiana implica che sia soddisfatta l'equazione del moto. Analizzare in particolare il caso del moto uniformemente accelerato e del moto in campo magnetico uniforme.

Esercizio A.2.28

Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una cerchio di raggio R. A sua volta il cerchio, sempre giacendo sullo stesso piano, ruota a velocità angolare costante ω intorno a un punto della circonferenza che rimane fisso.

Mostrare che il moto della particella relativamente al punto del cerchio opposto al punto fisso è lo stesso che quello di un pendolo in campo gravitazionale uniforme. Giustificare il risultato.

Esercizio A.2.29

Data una Lagrangiana della forma

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2 - V(q_i),$$

in cui V è una funzione omogenea di grado n delle q_i, determinare la forma della Lagrangiana risultante dalla trasformazione $q = \lambda Q$, $t = \lambda^{1-\frac{n}{2}} T$ e discutere le conseguenze sulle possibili soluzioni delle equazioni del moto.

Esercizio A.2.30

Un oscillatore spaziale carico di frequenza propria ω_0, massa m e carica q è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}$.

Scrivere la Lagrangiana del sistema, ricavare le equazioni del moto e determinarne le soluzioni, discutendo in particolare il caso in cui il campo magnetico si può considerare debole.

A.3 Piccole oscillazioni

Esercizio A.3.1

Considerare due pendoli semplici accoppiati, costituiti da due masse m_1 ed m_2 sospese alla stessa altezza mediante due fili di differente lunghezza l_1 ed l_2 e connesse da una molla di costante K la cui lunghezza a riposo l_0 coincide con la distanza tra le due masse quando i fili si trovano nella posizione verticale.

Scrivere la Lagrangiana completa del sistema e calcolarne lo sviluppo in serie di Taylor fino ai termini quadratici nelle variabili che rappresentano le oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile (approssimazione di piccole oscillazioni).

Nel caso particolare in cui

$$m_1 = m_2 \equiv m, \quad l_1 = l_2 \equiv l.$$

calcolare le frequenze proprie per le piccole oscillazioni del sistema.

Calcolare gli autovettori e farne uso per scrivere l'espressione esplicita dei modi normali come combinazioni lineari delle coordinate generalizzate. Dare un'interpretazione fisica dei modi normali così ottenuti.

Esercizio A.3.2

Risolvere il problema delle piccole oscillazioni unidimensionali di un sistema di tre masse collineari, essendo le masse laterali unite a quella centrale da due molle. Offrire un'interpretazione fisica per l'esistenza di un modo proprio di frequenza zero.

Nel caso particolare di simmetria di scambio tra le masse laterali determinare i modi normali del sistema e offrirne un'interpretazione fisica.

Esercizio A.3.3

Risolvere il problema delle piccole oscillazioni nel caso del pendolo doppio.

Esercizio A.3.4

Considerare un sistema unidimensionale costituito da due punti materiali di ugual massa m, uniti tra loro da una molla di costante K_0 e lunghezza a riposo l_0 e connessi, mediante due molle uguali di costante K e di lunghezza l, alle estremità di un tubo privo di attriti di lunghezza $l_0 + 2l$ all'interno del quale il sistema è libero di oscillare.

Calcolare le frequenze proprie e i modi normali di vibrazione del sistema. Discutere il limite $K \to 0$, interpretando fisicamente il risultato.

Esercizio A.3.5

Due pendoli identici di lunghezza l e massa m sono sospesi alla stessa altezza. La distanza tra i punti di sospensione è d. Tra le due masse si esercita una forza costante, mutuamente attrattiva, di intensità F_0, diretta orizzontalmente (e quindi non newtoniana).

Mostrare che è comunque possibile scrivere la Lagrangiana del sistema, calcolare le posizioni di equilibrio e le frequenze proprie delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio. Individuare i modi normali di oscillazione.

Esercizio A.3.6

La massa m_1 è appesa a una molla di costante K_1 e lunghezza a riposo l_1, a sua volta appesa a un punto di sospensione in un campo gravitazionale uniforme diretto verticalmente. La massa m_2 è appesa a una molla di costante K_2 e lunghezza a riposo l_2, a sua volta appesa alla massa m_1. Determinare le posizioni di equilibrio e le frequenze delle piccole oscillazioni.

Esercizio A.3.7

Considerare due pendoli accoppiati, costituiti da due masse m_1 ed m_2, sospese alla stessa altezza mediante fili inestensibili di uguale lunghezza l e unite da una molla di costante K e lunghezza a riposo pari alla distanza tra le posizioni di equilibrio delle masse.

Nel regime di piccole oscillazioni trovare i modi normali e le frequenze proprie del sistema.

Esercizio A.3.8

La più generale Lagrangiana quadratica nelle coordinate generalizzate, espressa nelle variabili η_i tali che la configurazione di equilibrio sia $\eta_i = 0$, ha la forma

$$L(\eta_i, \dot{\eta}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j,$$

dove T_{ij} e V_{ij}, sono matrici simmetriche semidefinite positive a valori costanti.

Scrivere la soluzione generale delle equazioni del moto e derivare un'espressione formale per i modi propri Q_k, mostrando che soddisfano l'equazione $\ddot{Q}_k = -\omega_k^2 Q_k$ dove ω_k sono le frequenze proprie. Trovare la forma esplicita dei modi propri e delle frequenze proprie nel caso di un sistema a due gradi di libertà.

Esercizio A.3.9

Due punti materiali carichi di massa m e carica $+q$ e $-q$ rispettivamente sono appesi a punti di sospensione posti a distanza d mediante due fili di lunghezza $l < 2d$.

Ammettendo che le cariche possano oscillare soltanto su un piano verticale, scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni, nell'ipotesi che gli spostamenti verticali siano trascurabili, mostrando che quest'ipotesi equivale alla richiesta che la forza del campo elettrico sia molto minore della forza di gravità.

Esercizio A.3.10

Un pendolo consiste di una massa m sospesa a una molla di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica K. Determinare le equazioni del moto e discutere il regime delle piccole oscillazioni.

Esercizio A.3.11

Data una superficie bidimensionale descritta parametricamente dalle equazioni

$$x = x(q_1, q_2), \qquad y = y(q_1, q_2), \qquad z = z(q_1, q_2),$$

definire la metrica $g_{ij}(q_1, q_2)$.

Scrivere la Lagrangiana per una particella soggetta alla gravità e vincolata a muoversi sulla superficie.

Determinare le condizioni per l'equilibrio e l'equazione per le piccole oscillazioni intorno all'equilibrio, interpretando geometricamente i valori delle frequenze proprie.

Esercizio A.3.12

Su un piano verticale si trova un sistema costituito da un punto di materiale di massa m_1 vincolato a muoversi su un cerchio di raggio R e da un punto materiale di massa m_2 vincolato a muoversi su una retta orizzontale posta al di sotto del cerchio a una distanza minima $2R$ dal centro dello stesso. I due punti sono connessi da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

Esercizio A.3.13

Due punti materiali di masse rispettive m_1 ed m_2 sono vincolati a muoversi su due rette verticali poste a una distanza d l'una dall'altra. I punti si attraggono mutuamente con una forza elastica di costante K e sono inoltre attratti da molle di costante K verso un centro di attrazione collocato tra le due rette in un punto da esse equidistante. Le lunghezze a riposo delle molle sono tutte nulle.

Studiare l'equilibrio e le piccole oscillazioni, determinando le frequenze proprie.

Esercizio A.3.14

Un pendolo è costituito da una massa m appesa a un filo di lunghezza l_0 che è a sua volta appeso al punto più alto di un disco verticale di raggio R, per cui nel corso dell'oscillazione il filo si avvolge intorno al cerchio restando in ogni istante ad esso tangente.

Scrivere la Lagrangiana e le equazioni del moto, e calcolare il valore dell'angolo medio θ_0 intorno al quale avvengono le oscillazioni. Discutere in particolare il regime di piccole oscillazioni.

Esercizio A.3.15

Considerare un pendolo doppio costituito da due aste di uguale lunghezza l. Allo snodo delle due aste è posta una massa m_1, mentre all'altra estremità dell'asta inferiore è posta una massa $m_2 \ll m_1$.

Nel regime delle piccole oscillazioni assumere la condizione iniziale di quiete del sistema e determinare poi la soluzione esplicita delle equazioni del moto per il caso in cui inizialmente m_1 è allontanata di un'ampiezza A_1 dall'equilibrio mentre l'asta inferiore è verticale e per il caso in cui m_1 è all'equilibrio mentre m_2 ne è allontanata di un'ampiezza A_2.

Analizzare il risultato ottenuto mettendo in evidenza il fenomeno dei battimenti.

Esercizio A.3.16

Calcolare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio dinamico (che è costituita dall'orbita circolare) per il moto di un corpo di massa m in un campo di forze centrali generato da un potenziale della forma $V(r) = \frac{K}{\beta} r^\beta$, in condizioni di momento angolare fissato $\mathbf{L}$. Parametrizzare la frequenza delle piccole oscillazioni in funzione di β e della frequenza ω_0 dell'orbita circolare. Discutere i casi particolari $\beta = 2$ e $\beta = -1$, interpretandoli fisicamente.

Esercizio A.3.17

Discutere le piccole oscillazioni del pendolo sferico intorno a una configurazione di equilibrio dinamico (orbita circolare), valutando anche la precessione dell'orbita al primo ordine non banale nell'apertura angolare del cono descritto dall'orbita circolare. Discutere in particolare il limite in cui l'apertura angolare tende a zero.

Esercizio A.3.18

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un cono di semiampiezza α disposto verticalmente con il vertice diretto verso il basso.

Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'orbita circolare stabile di altezza h. Determinare la condizione affinché le orbite risultanti a seguito di tali oscillazioni risultino (nella stessa approssimazione) chiuse.

Esercizio A.3.19

Un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione della gravità ma è sottoposto al vincolo di restare sulla superficie di rivoluzione descritta in coordinate cilindriche dalla funzione $z = f(\rho)$.

Scrivere la Lagrangiana e le equazioni del moto, e ridurre il problema a quadrature identificando gli integrali primi. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni.

Esercizio A.3.20

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una curva di equazione $z = A\rho^{2n}$, dove $n \geq 1$ è un numero intero. A sua volta la curva ruota con velocità angolare costante ω_0 intorno all'asse verticale z.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e dimostrare che per $n = 1$ l'unica posizione di equilibrio è $\rho = 0$, discutendone le proprietà di stabilità.

Determinare le posizioni di equilibrio per $n > 1$, discutendone le proprietà di stabilità. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile.

Esercizio A.3.21

Un punto materiale di massa m soggetto alla gravità è vincolato a muoversi lungo la curva di equazione $z = f(\rho)$. A sua volta la curva è posta in rotazione intorno all'asse verticale z con velocità angolare costante ω_0.

Determinare la posizione di equilibrio e la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio, individuando le condizioni per la stabilità.

Esercizio A.3.22

Un sistema è costituito da N molle di lunghezza a riposo l e costante K che connettono tra loro N punti materiali di massa m formando una catena lineare. Il sistema è sospeso all'estremità libera della prima molla e immerso nel campo gravitazionale di intensità g.

Determinare le posizioni di equilibrio delle masse e lo spettro delle N frequenze proprie del sistema (per il caso di spostamenti esclusivamente verticali).

Esercizio A.3.23

Un sistema è costituito da $N+1$ molle di lunghezza a riposo l e costante K che connettono tra loro N punti materiali di massa m formando una catena lineare i cui estremi sono vincolati a una distanza $(N+1)l$ l'uno dall'altro.

Scrivere la Lagrangiana del sistema in funzione di N coordinate generalizzate η_i che rappresentino gli scostamenti degli N punti materiali dalle rispettive posizioni d'equilibrio. Determinare lo spettro delle N frequenze proprie del sistema.

Esercizio A.3.24

N punti materiali tutti di massa m sono vincolati a muoversi su una circonferenza di raggio R e uniti ai loro vicini mediante N molle di costante elastica K, anch'esse vincolate a giacere sulla circonferenza.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare le proprietà delle configurazioni di equilibrio e lo spettro delle frequenze proprie, discutendo in particolare l'eventuale presenza di un modo a frequenza nulla.

Esercizio A.3.25

Un sistema è costituito da N punti materiali tutti di ugual massa m connessi da $N-1$ molle di uguale costante elastica K e lunghezza a riposo l a formare una catena lineare i cui estremi sono liberi di muoversi lungo la retta sulla quale è collocata la catena. In assenza di forze esterne, determinare lo spettro delle N frequenze proprie del sistema.

A.4 Formalismo hamiltoniano

Esercizio A.4.1

Scrivere le equazioni di Lagrange per un sistema costituito da un punto materiale libero di muoversi su un piano forato ma connesso, tramite un filo inestensibile passante per il foro, a un secondo punto materiale libero di muoversi su una retta verticale.

Ridurre il problema a una singola equazione differenziale trovando un integrale primo del moto.

Ripetere l'esercizio nel formalismo hamiltoniano.

Esercizio A.4.2

Scrivere la forma hamiltoniana del moto di una particella in un campo di forze centrali, sfruttando l'esistenza di un integrale primo della forma $L^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\ \dot{\phi}^2)$

Esercizio A.4.3

Scrivere le equazioni del moto di Lagrange per un pendolo piano costituito da una massa m_1 il cui punto di sospensione sia dotato di massa m_2 e sia libero di muoversi su una retta orizzontale.

Individuare una coordinata ciclica e discutere le conseguenze della sua esistenza. Scrivere la funzione di Routh.

Determinare la forma geometrica della traiettoria e studiare il sistema nel caso di piccole oscillazioni, analizzando la dipendenza della frequenza dalle masse.

Esercizio A.4.4

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana per il moto di una particella di massa m soggetta a una forza di tipo centrale nel caso in cui il sistema di riferimento sia dotato di un moto di rotazione uniforme con frequenza ω intorno a un asse passante per il centro delle forze.

Esercizio A.4.5

Un caso generico di sistema a due gradi di libertà con una coordinata ciclica è descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}A\dot{x}^2 + \frac{1}{2}B(y)\dot{y}^2 + C(y)\dot{x}\dot{y} - V(y).$$

Scrivere le equazioni del moto di Lagrange, la funzione di Routh, l'Hamiltoniana e ricavare la legge di conservazione dell'energia, evidenziando il ruolo della coordinata ciclica.

Esercizio A.4.6

Studiare le proprietà dinamiche delle particelle cariche nel campo di un (ipotetico) monopolo magnetico.

Esercizio A.4.7

Un punto materiale di massa m soggetto alla gravità è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R posta in rotazione uniforme con velocità angolare ω intorno a un diametro disposto verticalmente.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e derivare le equazioni del moto.

Discutere la formulazione hamiltoniana.

Esercizio A.4.8

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su un'asta orizzontale che ruota con velocità angolare costante ω intorno a un asse verticale. Il punto è inoltre soggetto a una forza elastica di costante K che lo richiama verso il centro di rotazione dell'asta.

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema e discutere le proprietà fisiche delle soluzioni al variare di ω rispetto a $\frac{K}{m}$. Dire se l'Hamiltoniana è una costante del moto e se coincide con l'energia del sistema.

Esercizio A.4.9

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi lungo una guida che forma un angolo α con un asse verticale e ruota intorno ad esso con velocità angolare ω costante. Inoltre il punto materiale è soggetto a una forza elastica di costante K diretta verso il punto della guida che si trova sull'asse di rotazione.

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema, ricavare le equazioni del moto e discutere la possibilità che si conservino l'energia e il momento angolare.

Considerare poi il caso in cui la rotazione intorno all'asse è libera e non forzata e ripetere la discussione precedente.

Esercizio A.4.10

Una struttura di peso trascurabile è formata da quattro bracci snodati di lunghezza l, disposti a formare un rombo. La struttura può ruotare liberamente intorno a una della sue diagonali, disposta verticalmente. L'estremo superiore dell'asse di rotazione è fisso, mentre all'estremo opposto è collocata una massa M; negli altri due vertici del rombo sono poste due masse m.

Individuare i gradi di libertà e scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema, discutendo le simmetrie e le leggi di conservazione.

Esercizio A.4.11

Due masse m_1 ed m_2 libere di muoversi su un piano sono connesse da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo l_0.

Determinare la Lagrangiana e l'Hamiltoniana individuando le simmetrie e i corrispondenti momenti conservati.

Esercizio A.4.12

Una particella di massa m si muove sotto l'influenza della gravità lungo la spirale di raggio R descritta in coordinate cilindriche dalla funzione $z = \alpha\,\varphi$.

Scrivere le equazioni hamiltoniane del moto e discuterne la soluzione.

Esercizio A.4.13

Una particella di massa m libera di muoversi in una dimensione è soggetta a una forza dipendente dal tempo della forma generale $F(x,t) = -\frac{dg(x)}{dx}h(t)$.

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema e discutere la conservazione dell'energia.

Esercizio A.4.14

Una particella di massa m è sottoposta a un potenziale centrale di tipo coulombiano attrattivo che determina per la particella un'energia potenziale della forma $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

Assumendo che il moto della particella sia relativistico, scrivere l'espressione relativistica dell'Hamiltoniana, individuare le costanti del moto e risolvere l'equazione per la traiettoria determinando la forma di $r(\varphi)$. Confrontare il risultato con l'espressione non relativistica.

Esercizio A.4.15

La dinamica di una particella di massa m, vincolata a muoversi sul piano di coordinate (x,y), è descritta dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x,y).$$

Posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, si possono introdurre sul piano le coordinate paraboliche:

$$\xi = \rho + y, \qquad\qquad \eta = \rho - y.$$

Scrivere l'espressione della Lagrangiana e dell'Hamiltoniana nelle nuove coordinate. Nel caso in cui il potenziale è centrale, $U = U(\rho)$, dimostrare che $\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}$.

Scrivere l'espressione della componente L_z del momento angolare in termini delle nuove coordinate.

Esercizio A.4.16

Nel caso di un moto periodico unidimensionale, o riducibile a un problema unidimensionale, data la funzione $\Phi(E) = \oint p(x,E)\,dx$ definita su un'orbita chiusa a partire dalla dipendenza del momento coniugato p dalla coordinata e dal valore dell'energia E, mostrare che per il periodo T dell'orbita vale la relazione $T = \frac{\partial \Phi}{\partial E}$.

Esercizio A.4.17

Considerare il sistema di equazioni canoniche $\dot{p} = -\alpha\, p\, q, \quad \dot{q} = \frac{1}{2}\alpha q^2$. Calcolarne le soluzioni a partire da condizioni iniziali arbitrarie p_0, q_0.

Esercizio A.4.18

A partire dalle soluzioni esplicite dell'equazione del moto di un oscillatore armonico in una dimensione con condizioni iniziali arbitrarie p_0, q_0 mostrare l'indipendenza dal tempo della forma $q\,dp - p\,dq$.

Esercizio A.4.19

Determinare la forma della più generale funzione $g(q,p)$ che può comparire nelle equazioni $\dot{p} = (Ap + B)f(q), \quad \dot{q} = g(q,p)$ affinché esse risultino canoniche. Scrivere la corrispondente forma generale per l'Hamiltoniana.

Esercizio A.4.20

Individuare i vincoli su a, b, c, d affinché le equazioni $\dot{p} = ap + bq, \quad \dot{q} = cp + dq$ risultino canoniche e scrivere la corrispondente Hamiltoniana.

Esercizio A.4.21

Individuare i vincoli su α, β, γ affinché le equazioni $\dot{p} = -p^{\alpha+1}q^{\gamma}, \quad \dot{q} = p^{\alpha}q^{\beta}$ risultino canoniche e scrivere la corrispondente Hamiltoniana.

Esercizio A.4.22

Data un'Hamiltoniana della forma $H = pf(q)$, dove f è una funzione arbitraria, ricavare e risolvere le equazioni canoniche. Calcolare la Lagrangiana del sistema e discutere il significato del risultato ottenuto.

Esercizio A.4.23

Data l'Hamiltoniana $H(p,q)$ indipendente dal tempo, dimostrare che, per ogni funzione arbitraria $f[H]$, le equazioni canoniche che si ottengono dall'Hamiltoniana $K(p,q) = f[H(p,q)]$ possono essere risolte a partire dalla conoscenza delle soluzioni delle equazioni relative ad H.

Esercizio A.4.24

Data l'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2}[p\,f(q)]^2$, risolvere le equazioni canoniche del moto riducendole a quadrature. Mostrare che per ogni soluzione la quantità $K = p\,f(q)$ è una costante del moto e spiegare in che senso soluzioni che possiedono la stessa energia possono essere distinte sulla base del valore assunto da K.

Esercizio A.4.25

Una particella di massa m, soggetta a una forza centrale di intensità $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}$, è vincolata a muoversi sulla superficie di un cilindro di raggio R il cui asse passa per il centro di attrazione della forza.

Determinare l'Hamiltoniana del sistema, scrivere le equazioni canoniche del moto e individuarne le soluzioni. Stabilire sotto quali condizioni il sistema ammetterà orbite chiuse.

B.1 Trasformazioni canoniche

Esercizio B.1.1

Considerare la trasformazione canonica indotta dalla funzione generatrice

$$F_2(q,P) = \frac{2}{3}\sqrt{2a}\,m\,(\frac{P}{m\,a} + q)^{\frac{3}{2}}$$

Determinare la forma esplicita della dipendenza delle nuove variabili canoniche (Q,P) dalle vecchie variabili (q,p).

Scrivere l'Hamiltoniana $H(p,q)$ per il moto unidimensionale di una particella di massa m soggetta a un'accelerazione costante a. Effettuare su H la trasformazione canonica sopra descritta e determinare la forma di $H(P,Q)$.

Scrivere le equazioni canoniche trasformate e trovarne esplicitamente le soluzioni, interpretandole fisicamente.

Esercizio B.1.2

Ricavare la funzione generatrice $F_1(q,Q)$ a partire dalla generatrice

$$F_2(q,P) = \int_0^q dx\sqrt{2mP - m^2\omega^2 x^2}.$$

Mostrare che per l'oscillatore armonico, essendo $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, l'Hamiltoniana trasformata è ciclica in Q, e le equazioni del moto trasformate conducono in modo immediato alla legge oraria del sistema.

Esercizio B.1.3

Applicare la trasformazione canonica:

$$Q = \int^q dx \frac{m}{\sqrt{p^2 + 2m[V(q) - V(x)]}},$$

$$P = \frac{p^2}{2m} + V(q) \equiv H(p,q)$$

al caso dell'oscillatore armonico tridimensionale, per il quale in coordinate polari vale $V(q) = \frac{L^2}{2\,m\,q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

Determinare la forma esplicita di $Q(q,p)$. Risolvere le equazioni del moto e confrontare con il risultato noto.

Esercizio B.1.4

Dato il sistema descritto dall'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + mgq$, applicare la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$F_2(q,P) = \frac{2}{3}\sqrt{2g}m(\frac{P}{mg} - q)^{\frac{3}{2}} - Pt$$

determinando la forma esplicita del cambio di variabili e la nuova Hamiltoniana.

Discutere il significato fisico del risultato.

Esercizio B.1.5

Dimostrare che, data l'Hamiltoniana $H = p^2 + q^2$, è sempre possibile trovare una trasformazione canonica tale che, in termini delle nuove variabili P e Q, l'Hamiltoniana trasformata risulti essere $K = f(P^2 + Q^2)$, dove $f(x)$ è una qualunque funzione (invertibile) del proprio argomento.

Esercizio B.1.6

In un sistema le cui equazioni del moto sono invarianti per traslazioni spaziali (utilizzando come esempio il caso del moto uniformemente accelerato), considerare la traslazione infinitesima come trasformazione canonica e individuare quindi la funzione generatrice che genera l'invarianza ed è pertanto una costante del moto.

Ripetere la discussione per il caso del moto in campo magnetico uniforme.

Esercizio B.1.7

Nel formalismo canonico interpretare le rotazioni infinitesime di un sistema come trasformazioni canoniche e costruire la corrispondente funzione generatrice, fornendone un'interpretazione fisica.

Esercizio B.1.8

Si mostri che, data la Lagrangiana di un sistema di punti materiali

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_i),$$

assumendo l'invarianza per traslazioni vale anche l'invarianza per trasformazioni di Galileo

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \mathbf{V}t, \qquad \dot{\mathbf{r}}_i \to \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{V}.$$

Individuare la corrispondente trasformazione hamiltoniana e costruire la funzione generatrice e l'Hamiltoniana trasformata.

Esercizio B.1.9

Per un sistema di punti materiali interagenti, assumendo invarianza per traslazioni, scrivere le trasformazioni di Galileo per la coordinata e il momento del centro di massa e trovare il generatore di tali trasformazioni.

Mostrare che la dipendenza dell'Hamiltoniana dalle coordinate del centro di massa è dettata dall'invarianza.

Esercizio B.1.10

Considerare un pendolo il cui filo (di lunghezza totale l_0) passa attraverso un foro in un piano orizzontale che a sua volta si muove verso il basso con velocità costante v.

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema, individuando una trasformazione canonica che riduca l'Hamiltoniana a quella di un oscillatore con frequenza dipendente dal tempo.

Determinare il moto del pendolo nell'approssimazione di piccole oscillazioni.

Esercizio B.1.11

Il filo di un pendolo di massa m e lunghezza l passa attraverso una carrucola fissa e viene poi trascinato orizzontalmente con una velocità costante v.

Scrivere la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema, confrontando quest'ultima con l'energia e discutendo le leggi di conservazione del sistema.

Se l_0 è la lunghezza iniziale del pendolo, nel regime di tempi brevi $vt \ll l_0$ e di piccole oscillazioni, verificare che una trasformazione della forma $p = lP$, $l\theta = Q + \frac{vP}{mg}$ è canonica e riduce l'Hamiltoniana a quella di un oscillatore armonico.

Esercizio B.1.12

Data la trasformazione puntuale $Q = q^2 + \frac{1}{2}\cos q$ determinare la funzione $P(p,q)$ che rende la trasformazione canonica.

Esercizio B.1.13

Determinare per le trasformazioni della classe

$$Q = f(q), \qquad\qquad P = (p-k)g(q)$$

quale relazione deve intercorrere tra le funzioni $f(q)$ e $g(q)$ affinché le trasformazioni risultino canoniche. Costruire le funzioni generatrici $F_2(q,P)$ ed $F_3(p,Q)$.

Esercizio B.1.14

Data la trasformazione canonica

$$p = P - a\,t, \qquad\qquad q = Q + P\,t - \frac{1}{2}a\,t^2$$

determinare una funzione generatrice e stabilire la forma esplicita dell'Hamiltoniana trasformata $K(P,Q,t)$ se l'Hamiltoniana di partenza è $H(p,q,t)$.

B.2 Parentesi di Poisson

Esercizio B.2.1

Considerare il seguente cambio di variabili hamiltoniane:

$$Q = e^{pq}, \qquad P = -e^{-pq} \log q.$$

Dimostrare che la trasformazione proposta è una trasformazione canonica.
Proporre una funzione generatrice $F_1(q, Q)$ per la trasformazione indicata.

Esercizio B.2.2

Dimostrare che la trasformazione

$$Q = \log(\frac{1}{q} \sin p), \qquad P = q \cot p$$

è canonica e ricostruire esplicitamente le quattro funzioni generatrici

$$F_1(q, Q),\ F_2(q, P),\ F_3(p, Q),\ F_4(p, P).$$

Esercizio B.2.3

Calcolare le parentesi di Poisson tra le componenti del momento angolare e quelle di una qualunque grandezza vettoriale che sia una combinazione lineare di vettori posizione e impulso.

Esercizio B.2.4

Sia data l'Hamiltoniana $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. A partire dalla funzione generatrice:

$$F_2(q, P) = \int_0^q dx \sqrt{2m[P - V(x)]}$$

calcolare la corrispondente trasformazione canonica e mostrare esplicitamente che le parentesi di Poisson fondamentali restano invariate.

Esprimere l'Hamiltoniana $H(p, q)$ come funzione delle variabili trasformate e ricavare le nuove equazioni canoniche. Mostrare che le nuove equazioni possono essere risolte in forma esplicita e fornire un'interpretazione fisica del risultato.

Esercizio B.2.5

Calcolare le parentesi di Poisson tra le componenti cartesiane della velocità per una particella di carica e soggetta alla forza magnetica generata da un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Risulta possibile, in presenza di un campo magnetico, effettuare una trasformazione canonica tale che i nuovi momenti coniugati siano proporzionali alle componenti cartesiane della velocità?

Esercizio B.2.6

È possibile, mediante una trasformazione canonica applicata a un sistema invariante per rotazioni, individuare un sistema di coordinate nel quale le componenti del momento angolare totale, che sono tutte conservate, fungano da momenti coniugati a coordinate cicliche?

Esercizio B.2.7

Calcolare le parentesi di Poisson delle componenti del vettore $\mathbf{X} = t\mathbf{p} - m\mathbf{q}$ con le componenti del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$. Nel caso in cui il momento angolare sia conservato, quali conseguenze fisiche si possono trarre dalla conservazione di una delle componenti del vettore $\mathbf{X}$?

Esercizio B.2.8

Confrontare le identità di Jacobi scritte per le componenti del vettore $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q\mathbf{A}}{m\,c}$, velocità di una particella in moto nel campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, con le identità di Bianchi soddisfatte dal campo magnetico stesso.

Esercizio B.2.9

Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale, la cui Hamiltoniana si scrive

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2,$$

e siano definite le variabili dinamiche $a_{\pm}(p, q) \equiv p \pm im\omega q$.

Calcolare le parentesi di Poisson $\{a_+, a_-\}$. Calcolare le parentesi di Poisson $\{a_{\pm}, H\}$ e risolvere le equazioni di evoluzione temporale per $a_{\pm}$ che ne conseguono.

Esercizio B.2.10

Considerare le variabili dinamiche $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ costruite a partire dalle componenti del momento angolare.

Scrivere l'espressione del modulo quadro del momento angolare in termini di $L_{\pm}$ e di L_z. Calcolare le parentesi di Poisson $\{L_{\pm}, L_z\}$.

Esercizio B.2.11

Verificare che la trasformazione

$$Q = \sqrt{\frac{p}{a}} \sin q, \qquad\qquad P = \sqrt{4ap} \cos q$$

è canonica per valori arbitrari del parametro a

Esercizio B.2.12

Trovare sotto quali condizioni per i parametri a e b la trasformazione

$$Q = q^a \cos(bp), \qquad\qquad P = q^a \sin(bp)$$

è canonica.

Determinare la forma esplicita della funzione generatrice $F_3(p,Q)$ nei casi in cui la trasformazione proposta è effettivamente canonica.

Esercizio B.2.13

Mostrare, utilizzando le identità di Jacobi, che se due componenti cartesiane del momento angolare sono costanti del moto allora anche la terza componente del momento angolare è costante.

Esercizio B.2.14

Per il sistema descritto sall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2 + 2\lambda pq)$$

individuare una trasformazione canonica dipendente dal parametro λ tale per cui la nuova Hamiltoniana risulti della forma

$$H' = \frac{1}{2}\omega f(\lambda)(P^2 + Q^2),$$

determinando la forma esplicita di $f(\lambda)$.

Esercizio B.2.15

Scrivere le trasformazioni di Galileo (cambiamenti non relativistici di sistema di riferimento inerziale) per un punto materiale di massa m la cui posizione è descritta da un vettore $\mathbf{r}$ e la cui quantità di moto vale $\mathbf{p}$.

Costruire il generatore di tali trasformazioni per il caso in cui la velocità relativa dei sistemi di riferimento sia un arbitrario vettore $\mathbf{v}$.

Esercizio B.2.16

Determinare sotto quali condizioni sui parametri è canonica la trasformazione

$$Q = \alpha q + \beta p, \qquad\qquad P = \gamma q + \delta p,$$

Determinare le funzioni generatrici della trasformazione quando essa è canonica.

Esercizio B.2.17

Nel caso del movimento di un punto materiale nel campo di forze centrali originato da un potenziale $V(r) = \frac{\alpha}{r}$, considerare il vettore $\mathbf{M} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità del punto materiale e $\mathbf{L}$ il suo momento angolare.

Calcolare le parentesi di Poisson $\{\mathbf{M}, H\}$ e dedurne le proprietà dinamiche del vettore $\mathbf{M}$ (vettore di Lenz).

Esercizio B.2.18

Ammettendo che per un sistema descritto dalle coordinate (q,p) esista una trasformazione canonica tale che $P = H(p,q)$, dove H è l'Hamiltoniana, determinare sulla base delle proprietà delle parentesi di Poisson e delle equazioni del moto canoniche quale equazione deve essere soddisfatta dalla nuova coordinata Q, e risolvere tale equazione.

Esercizio B.2.19

Dato il sistema descritto dalla Lagrangiana

$$L = e^{\gamma t}(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2),$$

ricavare l'Hamiltoniana e discuterne l'eventuale conservazione.

Trovare la funzione generatrice per la trasformazione canonica

$$Q = e^{\frac{\gamma}{2}t}q, \qquad\qquad P = e^{-\frac{\gamma}{2}t}p$$

e ricavare l'Hamiltoniana trasformata K, discutendone l'eventuale conservazione.

Effettuare un'ulteriore trasformazione canonica tale per cui risulti

$$\bar{K} = \frac{1}{2}\bar{P}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\bar{Q}^2$$

e calcolare la dipendenza di Ω^2 da ω^2 e γ.

Esercizio B.2.20

Considerare il moto di un punto materiale in due dimensioni, assumendo come coordinate canoniche q_1, q_2 le componenti cartesiane del vettore posizione e ponendo p_1, p_2 per i corrispondenti momenti coniugati.

Si introducano ora le nuove coordinate $Q_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ e $P_1 = \arctan \frac{p_1}{p_2}$.

Si verifichi la condizione di canonicità $\{Q_1, P_1\} = 1$ e si determini la più generale P_2 che rende la trasformazione canonica sotto l'ipotesi che valga $Q_2 = f(p_1^2 + p_2^2)$.

Esercizio B.2.21

Trovare una trasformazione lineare che sia canonica e che trasformi l'Hamiltoniana $K = \frac{1}{2}(PQ)^2$ in $H = \frac{1}{8}(p^2 - q^2)^2$.

Esercizio B.2.22

Dimostrare che la trasformazione

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_1^2 - Q_2^2), \qquad q_2 = Q_1 Q_2, \qquad p_1 = \frac{P_1 Q_1 - P_2 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \qquad p_2 = \frac{P_2 Q_1 + P_1 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2},$$

è canonica e verificare che trasforma l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

nell'Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2m}\frac{P_1^2 + P_2^2 - 2m\alpha}{Q_1^2 + Q_2^2}$$

.

Esercizio B.2.23

Dimostrare che la trasformazione

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2 p^2}}, \qquad Q = q\sqrt{1 + q^2 p^2}$$

è canonica e trovare la funzione generatrice $F_2(q, P)$.

Esercizio B.2.24

Data la trasformazione $P = p^\alpha$, determinare $Q(p, q)$ tale che la trasformazione sia canonica e trovare una generatrice.

Esercizio B.2.25

Per quali valori dei parametri reali k, l, m, n la trasformazione $P = p^k q^l$, $Q = p^m q^n$ è canonica? Trovare tutte le funzioni generatrici.

Esercizio B.2.26

Data la trasformazione $P = -q - \sqrt{p + q^2}$, $\quad Q = -q^2 - \alpha q\sqrt{p + q^2}$ determinare per quali valori di α la trasformazione è canonica e costruire la funzione generatrice $F_2(q, P)$.

Esercizio B.2.27

Data la trasformazione $P = -p^\alpha q^\beta$, $\quad Q = \gamma \ln p$ determinare per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica e costruire la funzione generatrice $F_1(q, Q)$.

Esercizio B.2.28

Dimostrare che la trasformazione

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q}\cos p), \qquad P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$$

è canonica e costruire le funzioni generatrici $F_3(p, Q)$ ed $F_1(q, Q)$.

Esercizio B.2.29

Data la trasformazione

$$p = a\big(e^{\alpha P(1+\beta Q)} - 1\big), \qquad\qquad q = b\ln(1+\beta Q)e^{\alpha P(1+\beta Q)}$$

determinare la trasformazione inversa e le condizioni di canonicità.

Esercizio B.2.30

Data la trasformazione

$$p = \tan(\alpha P)e^{\delta t}, \qquad\qquad q = \beta Q\cos^2(\gamma P)e^{\eta t}$$

trovare l'inversa, i vincoli di canonicità sui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ e la funzione generatrice $F_2(q, P, t)$.

Esercizio B.2.31

Il comportamento di una particella dotata di momento magnetico $\mu\mathbf{J}$ e immersa in un campo magnetico $\mathbf{B}$ può essere talvolta descritto semplicemente tramite l'Hamiltoniana

$$H = \mu\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{J},$$

dove $\mathbf{J}$ è il momento angolare intrinseco della particella, caratterizzato dalla proprietà che le parentesi di Poisson tra le sue componenti sono le stesse che quelle tra le componenti del momento angolare orbitale, mentre vale $\{J_i,\, B_j\} = 0$.

Determinare, mediante l'uso delle parentesi di Poisson, la legge di evoluzione temporale per $\mathbf{J}$, e discuterne la soluzione per il caso in cui il campo magnetico è uniforme e costante.

Esercizio B.2.32

Data la trasformazione

$$q = e^{-t}(PQ)^\alpha, \qquad\qquad p = \beta e^t (PQ)^\gamma \ln P,$$

determinare le condizioni su α, β, γ affinché la trasformazione sia canonica e calcolare la funzione generatrice $F_2(q, P)$. Applicare la trasformazione ottenuta all'Hamiltoniana $H(q,p) = -qp$, ricavando $K(Q, P)$.

Esercizio B.2.33

L'invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali è condizione sufficiente per la canonicità di una trasformazione. Dimostrare quest'affermazione per il caso delle trasformazioni che non dipendono esplicitamente dal tempo e per le trasformazioni dipendenti dal tempo di un sistema a un solo grado di libertà.