FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Primo appello - Sessione invernale
Giovedì 15 Gennaio 2004 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **R.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **A.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Una particella di massa a riposo m si muove nel riferimento del laboratorio con velocità $\mathbf{v}$ e a un dato istante emette in avanti un fotone la cui frequenza è ν_0 nel riferimento della sorgente. Questo fotone viene poi riflesso da uno specchio posto perpendicolarmente rispetto alla direzione del moto e successivamente riassorbito dalla particella che lo aveva emesso.

Calcolare la massa a riposo e l'impulso della particella dopo l'emissione del fotone.

Calcolare l'impulso, la velocità e la massa a riposo finale della particella.

Problema R.2

Un elettrone entra al tempo $t = -\frac{T}{2}$ in un condensatore il cui campo elettrico E è tale da far sì che al tempo $t = 0$ la velocità dell'elettrone risulti esattamente nulla.

Di conseguenza il moto si inverte e al tempo $t = +\frac{T}{2}$ l'elettrone esce dal condensatore nel punto esatto dal quale è entrato.

Quanto tempo proprio τ_0 (in funzione di T ed E) è trascorso per l'elettrone nel corso di questo processo?

Quanto vale (in funzione di τ) la quantità $\frac{d\theta}{d\tau}$, derivata della rapidità rispetto al tempo proprio, sapendo che $\tanh\theta \equiv \frac{v}{c}$?

Problema R.3

In uno spaziotempo a d dimensioni ($d-1$ dimensioni spaziali più il tempo) una particella di massa fissata può decadere in n prodotti di decadimento, anch'essi di massa fissata.

Calcolare, per $2 \leq d \leq n+1$, il numero G dei gradi di libertà *dinamici* del problema, tenendo conto delle simmetrie cinematiche, e ricordando che una rotazione in k dimensioni è caratterizzata da $\frac{1}{2}k(k-1)$ angoli.

Determinare il massimo valore possibile di G, al variare di d, per un valore fissato di n (sempre assumendo d ed n interi), e discutere che cosa avviene per valori di d che superano il valore per cui G è massimo, includendo anche il caso $d > n+1$.

Problema A.1

Considerare una particella di massa m soggetta al potenziale centrale

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^{3/2}}, \qquad\qquad \alpha > 0.$$

Trovare il raggio della traiettoria circolare. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni (radiali) intorno a tale orbita.

Cercare un'invarianza delle equazioni del moto del tipo

$$\mathbf{r} \to k\,\mathbf{r}, \qquad\qquad t \to h\,t,$$

con k e h costanti.

Interpretare quest'invarianza come "similitudine" tra le traiettorie del moto. Scrivere come si trasformano l'energia e il momento angolare e verificare la consistenza dei risultati relativi all'orbita circolare con la similitudine trovata.

Problema A.2

Dato un sistema a due gradi di libertà, descritto nel formalismo canonico dalle coordinate q_1, q_2 e dai momenti p_1, p_2, considerare la più generale trasformazione puntuale $Q_1 = Q_1(q_1, q_2, t)$, $Q_2 = Q_2(q_1, q_2, t)$.

Scrivere la forma esplicita di una funzione generatrice per questa trasformazione.

Dimostrare mediante il calcolo esplicito che per le parentesi di Poisson fondamentali vale $\{Q_i,\, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$ ovvero si ha invarianza rispetto alla trasformazione suddetta.

Problema A.3

Un sistema è costituito da una sbarra (di massa trascurabile) di lunghezza l vincolata all'estremo inferiore, mentre all'estremo superiore è collocata una massa m. La sbarra può flettersi, e quindi la massa può muoversi, su un piano disposto verticalmente e passante per l'estremo vincolato, ma tale flessione determina una forza di richiamo $F = -K\theta$ proporzionale all'angolo θ di scostamento della sbarra (e della massa) dalla verticale. Sul sistema agisce anche la forza di gravità.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare la condizione sui parametri m, l, K, g affinché $\theta = 0$ sia una posizione di equilibrio stabile.

Quando tale condizione non è soddisfatta scrivere l'equazione che determina la posizione di equilibrio stabile.

In entrambi i casi calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.