FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Primo appello - Sessione invernale
Mercoledì 19 Gennaio 2005 - ore 15

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **R.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **A.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Descrivere la cinematica della collisione elastica tra due particelle di massa differente m ed M nel riferimento nel quale $\mathbf{k}+\mathbf{k}'=0$, dove $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ sono gli impulsi della particella di massa m prima e dopo la collisione. Usare come variabili indipendenti le energie delle due particelle prima della collisione (calcolate nel riferimento sopra definito) e stabilire le relazioni di tali variabili con gli invarianti relativistici $s=(p+k)^2$ e $t=(k'-k)^2$.

Problema R.2

La massa gravitazionale di un fotone è data dalla sua energia divisa per c^2. La conservazione dell'energia totale implica pertanto una variazione nella frequenza del fotone quando esso viene emesso a una certa distanza dalla Terra e assorbito alla superficie terrestre (*red shift* gravitazionale).

Considerare una sorgente di onde elettromagnetiche posta su un'orbita geostazionaria (ossia con un periodo di 24 ore) e valutare le variazioni di frequenza del fotone dovute

a) all'effetto Doppler causato dal moto della sorgente rispetto alla Terra (trascurando la velocità di rotazione alla superficie della Terra);

b) alla "caduta" del fotone nel campo gravitazionale.

Determinare il segno relativo e assoluto dei due effetti e stimarne numericamente l'ordine di grandezza.

Problema R.3

Dimostrare che per uno spazio di Minkowski bidimensionale (nel quale è definito il tensore completamente antisimmetrico $\varepsilon_{\mu\nu}$) la quadriaccelerazione a^μ si può scrivere direttamente in termini della quadrivelocità U^μ e di uno scalare di Lorentz a nella forma $a^\mu = a\varepsilon^{\mu\nu}U_\nu$.

Determinare la relazione tra l'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea a_0 e lo scalare a.

Problema A.1

Una molecola triatomica simmetrica è schematizzabile come un sistema unidimensionale costituito da una massa centrale M unita ai due lati mediante due molle di uguale costante K e lunghezza a riposo l_0 a due altre masse uguali m.

Scrivere la Lagrangiana. Calcolare le frequenze proprie del sistema e scrivere la forma esplicita dei modi normali.

Problema A.2

Data la funzione generatrice delle trasformazioni canoniche

$$F_2(q,P) = \sqrt{2mPq^2 + A^2} + \frac{1}{2} A \ln \frac{\sqrt{2mPq^2 + A^2} - A}{\sqrt{2mPq^2 + A^2} + A}$$

determinare la forma esplicita della trasformazione e della sua inversa.

Applicare la trasformazione ottenuta all'Hamiltoniana

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} - \frac{A^2}{2mq^2}$$

e mostrare che le nuove equazioni canoniche sono banali e portano alla risoluzione esatta delle equazioni del moto.

Problema A.3

Dimostrare che, data l'Hamiltoniana

$$H(p,q,t) = H_0(p,q)K(t),$$

dove H_0 è arbitraria ma non esplicitamente dipendente dal tempo, e $K(t)$ è una funzione arbitraria del tempo, l'Hamiltoniana non è una costante del moto ma H_0 è un integrale primo del sistema.