FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 13 Gennaio 2006 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste nei problemi **R.1, R.3**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste nei problemi **A.1, A.3**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Si consideri il processo di collisione elastica in una dimensione tra una particella di massa m_1 e rapidità θ_1 e una particella di massa m_2 e rapidità θ_2.

1) Calcolare la rapidità θ_c del centro di massa del sistema in funzione delle masse e delle rapidità.

2) Calcolare le rapidità finali θ_1' e θ_2' delle particelle dopo la collisione in funzione dei parametri iniziali, dimostrando che tutta la dipendenza dalle masse può essere riassorbita in una dipendenza da θ_1, θ_2 e θ_c.

Problema R.2

Un'astronave si allontana dalla Terra alla velocità v. Nell'istante in cui l'astronave si trova a una distanza R dalla Terra (misurata nel riferimento terrestre) un segnale radio viene inviato dalla Terra all'astronave.

1) Quanto tempo occorre al segnale per raggiungere l'astronave, se misurato in tempo terrestre? Dove si troverà l'astronave in quell'istante?

2) Quanto tempo occorre al segnale per raggiungere l'astronave, se misurato in tempo dell'astronave?

Problema R.3

Si consideri il moto relativistico in una dimensione di una particella di massa a riposo m soggetta alla forza

$$F = F_0 \frac{1-\beta}{(1+\beta)^2},$$

dove F_0 è una costante e $\beta = u/c$.

1) Trovare la dipendenza della velocità u dal tempo t.

2) Esprimere la derivata della rapidità della particella rispetto al tempo proprio in funzione della rapidità stessa.

Problema A.1

Un corpo di massa m_1 si muove su un piano orizzontale, ed è connesso tramite un filo perfettamente inestensibile di lunghezza l, passante per un foro del piano, a un corpo di massa m_2 che si muove su una retta verticale (ed è soggetto alla gravità).

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

2) Trovare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio dinamico e confrontarla con la frequenza associata alla configurazione di equilibrio.

Problema A.2

Sia data la trasformazione $Q = f(p)$, dove f è una funzione arbitraria.

1) Determinare con il metodo delle funzioni generatrici la trasformazione $P = P(q, p)$ che insieme alla precedente costituisce una trasformazione canonica.

2) Verificare esplicitamente l'invarianza della parentesi fondamentale $\{Q, P\}_{q,p}$.

Problema A.3

Un corpo di massa m si muove su un piano per effetto di una forza centrale attrattiva cui corrisponde l'energia potenziale (di tipo coulombiano) $U = -\alpha/r$.

Si definiscono "invarianti adiabatici" le quantità

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi, \qquad\qquad I_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_m}^{r_M} p_r \, dr,$$

dove r_m e r_M sono rispettivamente la minima e la massima distanza dal centro attrattore che il corpo può raggiungere.

1) Calcolare la dipendenza di I_φ e I_r dall'energia totale E e dal momento angolare totale L del corpo.

2) Invertire le relazioni trovate ed esprimere le quantità E ed L come funzioni degli invarianti I_φ e I_r.