FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 11 Gennaio 2008 - ore 15

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste nei problemi **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste in tre problemi a scelta tra **R.1, R.2, A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Problema R.1

Il positronio è uno stato legato di un elettrone e un positrone (particelle di uguale massa m_e e di carica opposta $\pm e$), la cui massa è (approssimativamente) uguale a $2\,m_e$. Certi stati del positronio decadono in tre fotoni, e può accadere che nel riferimento di quiete del positronio i tre fotoni abbiano tutti la stessa frequenza.

Calcolare tale frequenza ed esprimere la corrispondente lunghezza d'onda come multiplo della lunghezza d'onda Compton.

Calcolare la lunghezza d'onda del terzo fotone nel riferimento del centro di massa dei primi due.

Problema R.2

Si consideri un generico quadritensore antisimmetrico covariante $A_{\mu\nu}$. Si adotti la rappresentazione

$$A_{0i} \equiv c_i, \qquad A_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} b_k,$$

in cui le quantità b_k e c_k trasformano per rotazioni come le componenti di un vettore.

Si dimostri che il determinante della matrice $A_{\mu\nu}$ soddisfa la relazione $det A_{\mu\nu} = (\sum_i b_i c_i)^2$, mentre vale $det A_{ij} = 0$.

Nel caso particolare in cui $A_{\mu\nu} = P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu$, con P_μ e Q_μ quadrivettori arbitrari, si mostri che vale $det A_{\mu\nu} = 0$.

Si dimostri che l'inversa di $A_{\mu\nu}$ è la matrice antisimmetrica

$$I_{j0} = \frac{b_j}{\sum_i b_i c_i}, \qquad I_{kj} = \frac{\epsilon_{jkl} c_l}{\sum_i b_i c_i}.$$

Problema A.1

Un oscillatore spaziale carico di frequenza propria ω_0, massa m e carica q è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}$.

Sapendo che il potenziale vettore $\mathbf{A}$ associato a un campo magnetico costante può essere scritto nella forma $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$, scrivere la Lagrangiana del sistema in coordinate cilindriche e ricavare le equazioni del moto.

Scrivere la funzione di Routh e ricavare l'equazione del moto. Mostrare che l'equazione (radiale) ottenuta è la stessa che si sarebbe trovata per un opportuno oscillatore armonico tridimensionale.

Problema A.2

Si consideri l'Hamiltoniana H della particella libera di massa m in tre dimensioni.

Si considerino le funzioni di $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ e t definite dalle relazioni

$$D = t\,H - \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}, \qquad\qquad K = t^2 H - 2\,t\,D - \frac{1}{2} m\,r^2.$$

Si calcolino le parentesi di Poisson

$$\{H, D\}, \qquad \{H, K\}, \qquad \{D, K\},$$

esprimendo il risultato esclusivamente in termini di H, D e K.

Si mostri che D e K sono conservate e se ne calcoli il valore per arbitrarie condizioni iniziali $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{r}_0$.