FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Secondo appello - Sessione invernale
Lunedì 9 Febbraio 2004 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **R.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **A.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Due sorgenti si muovono nel sistema di riferimento del laboratorio con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ed emettono in avanti un fotone ciascuna. Le frequenze dei fotoni sono ν_1 e ν_2 nei sistemi di riferimento delle rispettive sorgenti. A un certo punto i due fotoni collidono e producono una particella. Calcolarne la massa

Problema R.2

Una particella di massa m è soggetta alla quadriforza $F^\mu = kx^\mu$, dove x^μ è il quadrivettore posizione e $k > 0$.

a) Scrivere esplicitamente la soluzione delle equazioni del moto in funzione del tempo nel caso in cui il moto è rettilineo; come vanno scelte le costanti arbitrarie per prendere il limite nonrelativistico della soluzione?

b) Scrivere la soluzione più generale in funzione del tempo proprio evidenziando le costanti indipendenti da cui dipende. Verificare che il numero di costanti arbitrarie così ottenuto è quello teoricamente corretto.

Problema R.3

Due pianeti A e B si trovano in quiete relativa a una distanza propria D l'uno dall'altro. L'astronave postale deve effettuare il viaggio di andata e ritorno in un tempo complessivo fissato T (misurato nel riferimento dei pianeti).

a) Per ridurre il disagio degli astronauti causato dalla differenza tra T e il tempo proprio dell'astronave τ si vogliono scegliere le velocità v_1 e v_2 dei viaggi di andata e ritorno in modo tale da massimizzare τ. Determinare v_1 e v_2 in funzione di D e T trascurando i periodi di accelerazione.

b) Se al contrario si volesse minimizzare τ come si dovrebbero scegliere v_1 e v_2?

c) Come cambierebbe la seconda risposta se si ammettesse, a parità di altre condizioni, un periodo di sosta tra andata e ritorno? Qual è la durata della sosta che minimizza τ?

Problema A.1

Sia data una particella di massa m soggetta al potenziale centrale

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}, \qquad \alpha > 0.$$

Sfruttando la conservazione del momento angolare $\mathbf{L}$ ridurre il problema a un moto piano.

a) Dire in quali casi una traiettoria è confinata a una regione limitata del piano e calcolare la dimensione di questa regione in funzione dell'energia e del momento angolare.

b) Cercare un'invarianza delle equazioni del moto del tipo

$$\mathbf{r} \to k\mathbf{r}, \qquad t \to ht$$

con k e h costanti. Interpretare quest'invarianza sotto forma di "similitudine" tra le traiettorie del moto. Scrivere come si trasformano l'energia e il momento angolare e verificare la consistenza con il risultato di a).

c) Determinare esplicitamente le traiettorie $r(\theta)$ e verificare ancora la similitudine introdotta al punto b).

[Suggerimento: per integrare le equazioni passare alla variabile $v = 1/r$]

Problema A.2

Considerare una particella di massa m e carica q immersa in un campo elettromagnetico arbitrario A^μ.

a) Calcolare le parentesi di Poisson

$$\epsilon_{ijk}\{p_j, A_k\}, \qquad \{p_i, \phi\}.$$

b) Usando l'identità di Jacobi dimostrare (senza calcolarle) che valgono le relazioni

$$\epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, A_k\}\} = 0, \qquad \epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, \phi\}\} = 0.$$

c) Dimostrare le identità precedenti col calcolo esplicito e dire a quali equazioni di Maxwell corrispondono.

Problema A.3

Data la Lagrangiana

$$L = \sqrt{1 - q^2\dot{q}^2} - \ln\left(1 + \sqrt{1 - q^2\dot{q}^2}\right) + \ln \dot{q}^2$$

ricavare la corrispondente Hamiltoniana.

Sulla base del risultato mostrare che è possibile determinare le soluzioni delle equazioni del moto una volta note le soluzioni per la Lagrangiana ausiliaria

$$L' = \frac{1}{2}(\dot{q}'^2 - q'^2).$$