FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Secondo appello - Sessione invernale
Mercoledì 9 Febbraio 2005 - ore 15

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **R.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste in tutti i problemi **A.x**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Considerare l'insieme dei sistemi di riferimento nei quali la diffusione elastica di due particelle di masse m_1 ed m_2, ovvero il processo $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$, appare per una delle due particelle come una riflessione da parete piana infinitamente massiva (riflessione a specchio).

a) Mostrare che tale caratteristica, nei riferimenti in cui è presente, vale anche per la seconda particella.

b) Mostrare che, di conseguenza, la componente dell'impulso totale del sistema ortogonale alla "parete", è nulla.

c) Indicare il numero dei gradi di libertà "cinematici" (ossia delle simmetrie non rilevanti per la dinamica) necessari per caratterizzare completamente l'insieme.

d) Calcolare la relazione tra l'impulso (spaziale) trasferito calcolato in uno di questi sistemi di riferimento e l'invariante $t = (p_1' - p_1)^2$.

d) Mostrare che anche il riferimento del centro di massa appartiene all'insieme e calcolare in tale riferimento il valore della componente dell'impulso iniziale parallela alla "parete" in termini degli invarianti t ed $s = (p_1 + p_2)^2$.

Problema R.2

Mostrare che, per tutti i sistemi la cui quadriaccelerazione a^μ soddisfa la relazione $a^\mu a_\mu = K$, dove K è una costante nota indipendente dal tempo proprio, valgono le relazioni

$$U_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = K', \qquad\qquad U_\mu \frac{d^3 U^\mu}{d\tau^3} = 0,$$

dove K' è una costante che può essere calcolata.

Dimostrare che, se tutte le norme dei quadrivettori ottenuti mediante derivate successive di U^μ rispetto al tempo proprio sono costanti e note, allora tutti i prodotti scalari tra derivate di ordine pari e derivate di ordine dispari sono nulli e tutti i prodotti scalari tra derivate dello stesso ordine sono costanti e calcolabili.

(facoltativo) Individuare un tipo di moto che soddisfa quest'ultima condizione

Problema R.3

Si assuma che un fotone sia accoppiato al campo gravitazionale Newtoniano generato da una massa puntiforme effettiva $2M$ (dove il fattore 2 simula, nel regime che ci interessa, gli effetti della relatività generale) per effetto della propria "massa gravitazionale" E/c^2, dove al solito $E = h\nu$. Si determini a quale distanza dalla sorgente del campo dovrebbe allora trovarsi il fotone, se diretto perpendicolarmente al raggio che lo congiunge con la sorgente, affinché il suo moto potesse risultare circolare uniforme.

Problema A.1

Determinare, come frazione dell'anno terrestre, il massimo tempo che un corpo celeste in orbita parabolica intorno al Sole (ossia con energia meccanica totale uguale a zero) può trascorrere all'interno dell'orbita terrestre, supposta circolare e complanare.

Calcolare il corrispondente valore della minima distanza dal Sole raggiunta dal corpo.

(facoltativo) Calcolare l'angolo $\Delta\varphi$ (avente vertice nel Sole) tra l'ingresso e l'uscita del corpo dall'orbita terrestre.

Ai fini del problema in esame si ricorda il valore dei seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-\xi}} = \frac{2}{3}(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + 2\,\xi(x-\xi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x}{\xi}-1}} = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{\xi}-1}.$$

Problema A.2

Un punto materiale di massa m collocato nella posizione $\mathbf{r}$ è soggetto all'azione simultanea di N forze armoniche di tipo centrale dirette verso i rispettivi centri d'attrazione $\mathbf{r}_i$ e caratterizzate da costanti elastiche K_i.

Scrivere la Lagrangiana del sistema e descrivere il moto risultante del corpo materiale.

Problema A.3

Data la funzione generatrice per una trasformazione canonica

$$F_4(p,P) = \frac{1}{2}L\ln\Big(\frac{p-\sqrt{p^2-2mP}}{p+\sqrt{p^2-2mP}}\Big),$$

dove L è una costante assegnata, determinare la forma esplicita della trasformazione e quella della trasformazione inversa.

Determinare la soluzione delle equazioni canoniche

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad\qquad \dot{p} = -\frac{L^2}{mq^3}$$

con l'ausilio della trasformazione sopra indicata