FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Secondo appello - Sessione invernale
Venerdì 3 Febbraio 2006 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste nei problemi **R.1, R.3**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste nei problemi **A.1, A.3**. Il tempo a disposizione è di **due** ore e **mezzo**.

Problema R.1

Due corpi di massa nota, rispettivamente m_1 ed m_2, si muovono collinearmente con rapidità il cui valore in un particolare riferimento è rispettivamente θ_1 e θ_2.

1) Calcolare l'energia totale del sistema nel riferimento del centro di massa.

2) Calcolare il modulo dell'impulso che ciascuno dei due corpi possiede nel riferimento del centro di massa.

3) Calcolare la velocità relativa dei due corpi.

4) Calcolare l'energia e l'impulso del corpo di massa m_1 nel riferimento del laboratorio (in cui il corpo di massa m_2 è fermo).

5) Commentare la dipendenza dei risultati ottenuti nelle domande precedenti dalle rapidità, interpretandoli alla luce delle proprietà delle quantità calcolate nel caso di trasformazioni di Lorentz.

Problema R.2

All'istante scelto come origine dei tempi un'esplosione fa partire dall'origine degli assi spaziali in tutte le direzioni frammenti relativistici non interagenti tra loro dotati di velocità arbitrarie $0 < u < c$. Al tempo T un osservatore rimasto fermo all'origine riceve i segnali elettromagnetici (fotoni) che i frammenti stanno costantemente rinviandogli.

1) Determinare, nelle coordinate dell'osservatore, posizione x e tempo t dell'invio dei segnali ricevuti allo stesso istante T come funzioni della velocità u delle sorgenti e di T.

2) Determinare il tempo proprio delle sorgenti al momento dell'emissione dei segnali suddetti, come funzione di u e di T.

3) Riformulare la risposta alla domanda precedente come funzione della posizione x dei frammenti al momento dell'emissione del segnale (posizione apparente) e di T. Precisare il significato fisico della singolarità nell'espressione ottenuta.

Problema R.3

Si consideri il moto relativistico in una dimensione di una particella di massa a riposo m soggetta alla forza

$$F = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} F_0,$$

dove F_0 è una costante e $\beta = u/c$.

1) Trovare la dipendenza della velocità u dal tempo t, con la condizione iniziale $u(0) = 0$ (trascurando il fatto, matematicamente ininfluente, che la forza all'istante iniziale è singolare).

2) Determinare la dipendenza del tempo proprio dal tempo del riferimento.

2) Esprimere la derivata della rapidità della particella rispetto al tempo proprio in funzione della rapidità stessa.

Problema A.1

Il punto di sospensione di un pendolo di massa m e lunghezza l è costituito da una massa M libera di muoversi lungo una guida verticale e anch'essa sottoposta all'azione della gravità.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema nelle variabili z (posizione di M) e θ (angolo formato dall'asta del pendolo con la verticale)

2) Scrivere le equazioni del moto e mostrare (mediante sostituzione dell'equazione per z nell'equazione per θ) che l'equazione per θ è la stessa che si otterrebbe se la gravità fosse completamente assente.

3) Ricavare dall'equazione per θ un integrale primo del moto indipendente da z.

Problema A.2

Le equazioni di trasformazione tra due insiemi di coordinate sono:

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p),$$

$$P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p) q^{\frac{1}{2}} \sin p.$$

1) Mostrare direttamente che la trasformazione è canonica.

2) Costruire la funzione generatrice $F_3(p, Q)$.

Problema A.3

N corpi interagenti di masse m_i, le cui posizioni in un riferimento inerziale sono individuate dai vettori $\mathbf{r}_i$, sono immersi in un campo gravitazionale uniforme che produce su ciascuno di essi un'accelerazione $\mathbf{g}$. Le forze d'interazione tra gli N corpi sono di tipo conservativo e possono essere rappresentate tramite le energie potenziali $V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema utilizzando $\mathbf{r}_i$ come coordinate.

2) Riscrivere la Lagrangiana del sistema utilizzando le coordinate $\mathbf{r'}_i$ che risultano dal passaggio a un sistema di riferimento (non inerziale) che si muove con accelerazione $\mathbf{g}$.

3) Mostrare (senza far uso delle equazioni del moto) che la Lagrangiana ottenuta come risposta alla domanda precedente è equivalente a quella che si sarebbe ricavata in un riferimento inerziale se il campo gravitazionale non fosse stato presente.