FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Secondo appello - Sessione invernale
Venerdì 1 Febbraio 2008 - ore 9

Ai fini del recupero della prima prova in itinere, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Ai fini del recupero della seconda prova in itinere, la prova consiste nei problemi **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste in tre problemi a scelta tra **R.1, R.2, A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Problema R.1

Si consideri un moto relativistico che soddisfi l'equazione $\frac{d^3U^\mu}{d\tau^3} = 0$. Ci si ponga nel riferimento inerziale corrispondente al riferimento di quiete istantanea nell'istante in cui $\tau = 0$, e sia a il modulo dell'accelerazione propria in tale istante.

1) Si dimostri che il modulo dell'accelerazione propria è costante nel tempo.

2) Si dimostri che il moto avviene su un piano

Problema R.2

Si consideri un moto relativistico che soddisfi l'equazione $\frac{d^3U^\mu}{d\tau^3} = 0$. Ci si ponga nel riferimento inerziale corrispondente al riferimento di quiete istantanea nell'istante in cui $\tau = 0$, e sia a il modulo dell'accelerazione propria in tale istante.

1) Mediante una scelta opportuna dell'orientamento degli assi spaziali si trovi la legge oraria del moto in funzione di τ e del parametro a

2) Si scriva l'equazione della traiettoria nel piano, assumendo che l'origine sia attraversata al tempo $\tau = 0$.

Problema A.1

Si consideri il sistema unidimensionale costituito da un punto materiale di massa m la cui energia potenziale è data dall'espressione

$$V(x) = \frac{1}{2} A\,(b\,x)^{2n},$$

dove A è una costante con le dimensioni fisiche dell'energia, b una costante con le dimensioni fisiche dell'inverso di una lunghezza, legata al raggio d'azione della forza, e n è intero positivo.

1) Scrivere la Lagrangiana e l'equazione del moto del sistema, discutendo per quali valori di n sia legittimo considerare il limite di piccole oscillazioni.

2) Per ogni valore fissato $E > 0$ dell'energia del sistema determinare la posizione dei punti di inversione, entro i quali avviene il movimento.

3) Poichè il moto è periodico, calcolare il periodo in funzione dei parametri m, A, b ed E, tenendo conto del fatto che vale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^{2n}}} = 2^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma^2(1 + \frac{1}{2n})}{\Gamma(1 + \frac{1}{n})},$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione speciale che soddisfa $\Gamma(1 + z) = z\,\Gamma(z)$.

4) Valutare il periodo nel limite in cui $n \to \infty$, sapendo che per $z << 1$ vale $\Gamma(1+z) \approx 1 - C\,z$, discutendo la dipendenza da A e proponendo un'interpretazione fisica del risultato.

Problema A.2

Si consideri la particella di massa m in tre dimensioni, il cui moto è descritto dall'Hamiltoniana

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} + \frac{C}{2\,r^2}.$$

Si considerino le funzioni di $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ e t definite dalle relazioni

$$D = t\,H - \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}, \qquad K = t^2 H - 2\,t\,D - \frac{1}{2} m\,r^2.$$

1) Si mostri che D e K sono conservate.

2) Si calcolino le parentesi di Poisson

$$\{H, D\}, \qquad \{H, K\}, \qquad \{D, K\},$$

esprimendo il risultato esclusivamente in termini di H, D e K.