FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Secondo appello - Sessione estiva
Lunedì 5 Luglio 2004 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Problema R.1

Una sorgente in quiete emette ogni secondo N particelle, tutte dotate della stessa velocità u e tutte orientate nella stessa direzione. Tutte le particelle emesse vengono poi rilevate da un osservatore che si sta allontanando dalla sorgente con velocità $v < u$.

Quante particelle verranno osservate ogni secondo (tempo dell'osservatore) dal rivelatore?

Problema R.2

In un processo che si svolge in una sola dimensione, fotoni di impulso k vengono riflessi elasticamente da uno specchio in movimento di massa finita M e rapidità iniziale θ.

Determinare in funzione dei parametri indicati l'impulso k' del fotone riflesso e la rapidità θ' dello specchio dopo la riflessione.

Indicare, sotto forma di disuguaglianza del tipo $a \ll b$, la condizione matematica che corrisponde alla condizione fisica di "ottica geometrica".

Problema A.1

Tre corpi identici di massa m liberi di muoversi in una dimensione sono connessi l'un l'altro in tutti i modi possibili da tre molle di uguale costante K, caratterizzate da lunghezze a riposo differenti ma tali che, quando il sistema è completamente in equilibrio, tutte le molle si trovino nella propria posizione di riposo.

Calcolare le frequenze proprie del sistema e discutere i modi normali di oscillazione.

Problema A.2

Due particelle di masse m_1 e m_2 si trovano nelle posizioni $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Si definiscono le quantità

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge m_2\mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{l} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

dove μ è la massa ridotta $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

Esprimere tali quantità in termini delle variabili canoniche del sistema $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{p}_i \equiv m_i\mathbf{v}_i$.

Mostrare che le parentesi di Poisson $\{L_i, L_j\}$ e $\{l_i, l_j\}$ sono le stesse che per le componenti del momento angolare di una singola particella, e che vale $\{L_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k$.

Mostrare che il cambio di variabili

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{p} = \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

è una trasformazione canonica.

Mostrare che $\mathbf{R} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{L} - \mathbf{l}$ e, sulla base dei risultati precedenti, mostrare senza effettuare il calcolo diretto che anche le parentesi di Poisson tra le componenti di quest'ultimo vettore sono quelle di un momento angolare.