FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Secondo appello - Sessione estiva
Giovedì 5 Luglio 2007 - ore 9

Ai fini dell'appello d'esame, la prova consiste nei problemi **R.1, R.2** e **A.1**. Il tempo a disposizione è di **tre** ore.

Problema R.1

Un osservatore in quiete all'origine di un sistema di riferimento inerziale osserva l'emissione di un segnale e.m. da parte di una sorgente in moto (con velocità u) lungo una retta, parallela all'asse x e situata a distanza d da tale asse nella direzione y.

All'istante $t = 0$ l'osservatore riceve un segnale diretto lungo l'asse y. Se la frequenza di emissione misurata nel riferimento della sorgente è ν_0, determinare:

a) la frequenza con cui il segnale è osservato

b) la direzione in cui il segnale è stato emesso nel riferimento della sorgente

c) il tempo impiegato dal segnale tra sorgente e osservatore, misurato nel riferimento della sorgente e in quello dell'osservatore.

Problema R.2

Due onde e.m. sinusoidali viaggiano in direzioni opposte lungo lo stesso asse con frequenze ν_1 e ν_2 e uguale ampiezza.

Mostrare che esiste un sistema di riferimento in cui la sovrapposizione delle due onde appare come un'onda stazionaria e calcolare:

a) la velocità con cui si muove tale riferimento rispetto a quello iniziale

b) la frequenza di oscillazione dell'onda stazionaria

c) la velocità del riferimento del centro di massa del sistema nell'ipotesi che le due onde possano essere interpretate come due fasci contenenti un ugual numero di fotoni dotati ciascuno di un quadrimpulso dato dalla relazione $p^\mu = h\, k^\mu$.

Problema A.1

Nel movimento di una particella di massa m nel campo di forze generato da un potenziale di tipo centrale $V(r) = \frac{\alpha}{r}$ si conserva, oltre al momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, anche il vettore di Lenz $\mathbf{M} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \wedge \mathbf{L} + \alpha\frac{\mathbf{r}}{r}$.

a) Mostrare che le parentesi di Poisson di due componenti qualunque del vettore di Lenz soddisfano la relazione $\{M_i, M_j\} = -2\,\frac{H}{m}\epsilon_{ijk}L_k$, dove H è l'Hamiltoniana della particella.

b) Mostrare che il modulo quadro del vettore di Lenz $\mathbf{M}^2$ si può scrivere come funzione di H e di $\mathbf{L}^2$ senza fare ricorso ad altre variabili dinamiche.

c) Mostrare che, avendo definito il vettore $\mathbf{N} \equiv \sqrt{-\frac{m}{2H}}\mathbf{M}$, e i vettori $\mathbf{J}^\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L} \pm \mathbf{N})$, valgono le parentesi di Poisson

$$\{J_k^\pm, J_l^\pm\} = \epsilon_{klm} J_m^\pm, \qquad \{J_k^+, J_l^-\} = 0.$$

d) Mostrare infine che è possibile esprimere l'Hamiltoniana come funzione della quantità $J^2 = {\mathbf{J}_+}^2 = {\mathbf{J}_-}^2$, senza far uso di altre variabili dinamiche, e determinare tale funzione.